Test 1 - Diferenciálny počet: Skupina A

1. (3 body) Napíšte rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = \sin(\ln(4x))$ v $x_0 = \frac{1}{4}$.

Riešenie: $f(1/4) = \sin(\ln(4 \cdot \frac{1}{4})) = \sin(\ln 1) = \sin 0 = 0$. Vypočítame prvú deriváciu:

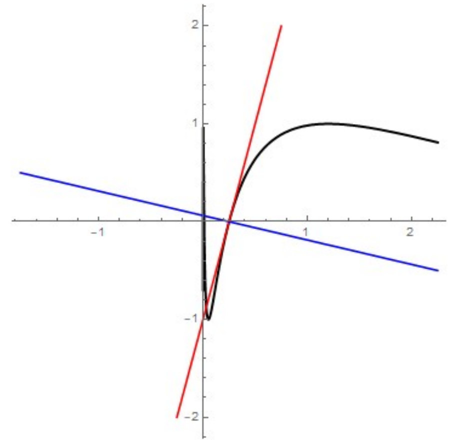
$$f'(x) = \cos(\ln(4x))\frac{1}{4x} \cdot 4 = \frac{1}{x}\cos(\ln(4x))$$

Dosadíme $x_0 = \frac{1}{4}$ aby sme dostali smernicu dotyčnice: $f'(1/4) = 4\cos(\ln(1)) = 4$. Rovnica dotyčnice je:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 1$$

A rovnica normály:

$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x_0 - x) + f(x_0) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x$$



Obr. 1: Dotyčnica (červená) a normála (modrá) ku grafu funkcie z príkladu 1.A

2. (3 body) Napíšte Taylorov polynóm rádu $n = 3$ funkcie $f(x) = \cos^2 x$ v $x_0 = \pi/2$.

Riešenie: Vypočítame všetky derivácie funkcie f až po tretiu a dosadíme do nich hodnotu $x_0 = \pi/2$:

$$f(x) = \cos^2 x \qquad \Rightarrow \qquad f(\pi/2) = \cos^2(\pi/2) = 0$$

$$f'(x) = 2\cos x \sin x \qquad \Rightarrow \qquad f'(\pi/2) = 2\cos(\pi/2)\sin(\pi/2) = 0$$

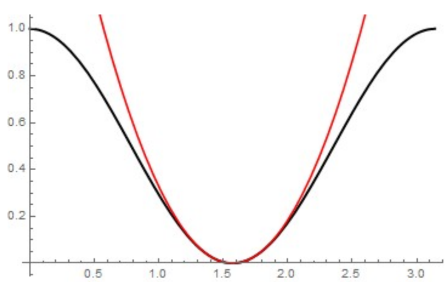
$$f''(x) = -2\sin x \cdot \sin x + 2\cos x \cdot \cos x = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) \qquad \Rightarrow \qquad f''(\pi/2) = 2(\sin^2(\pi/2) - \cos^2(\pi/2)) = 2(1-0) = 2$$

$$f'''(x) = 4(\sin x\cos x + \cos x \sin x) = 8\sin x\cos x \qquad \Rightarrow \qquad f'''(\pi/2) = 8\sin(\pi/2)\cos(\pi/2) = 0$$

Takže už len dosadíme do vzorca:

$$T^3_{(\pi/2)}(x) = f(\pi/2) + \frac{f'(\pi/2)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{f''(\pi/2)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{f'''(\pi/2)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

$$T^3_{(\pi/2)}(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$



Obr. 2: Graf Taylorovho polynómu (červená) k funkcii z príkladu 2.A.

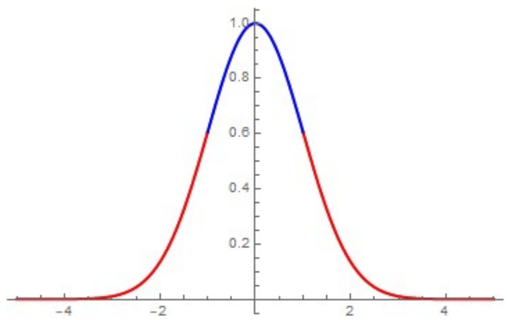
3. (4 body) Nájdite intervaly konvexnosti/konkávnosti a inflexné body funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Riešenie: Nájdeme prvú a potom aj druhú deriváciu funkcie:

$$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f''(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$$

Vzhľadom nato, že je výraz $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ riešime iba kvadratickú rovnicu $x^2 - 1 = 0$ a kvadratické nerovnice $x^2 - 1 < 0$ a $x^2 - 1 > 0$.

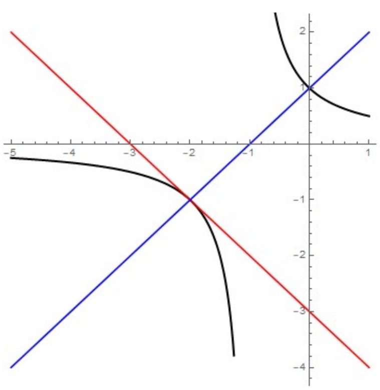
Nulové body druhej derivácie $f''(x)$ sú koreňmi kvadratickej rovnice $x^2 - 1 = 0$ teda $x = \pm 1$ (inflexné body). Ďalej rozložením na súčin možno určiť, že výraz $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ je pre $x \in (-1, 1)$ záporný (f je tu konkávna) a pre $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ kladný (f je tu konvexná).



Obr. 3: Konvexnosť (červená) a konkávnosť (modrá) funkcie z príkladu 3.A.

Test 1 - Diferenciálny počet: Skupina B

.



Obr. 4: Dotyčnica (červená) a normála (modrá) ku grafu funkcie z príkladu 1.B

1. (3 body) Napíšte rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = \frac{1}{x+1}$ v $x_0 = -2$.

Riešenie: $f(-2) = \frac{1}{-2+1} = -1$. Vypočítame prvú deriváciu:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Dosadíme $x_0 = -2$ aby sme dostali smernicu dotyčnice: $f'(-2) = -\frac{1}{(-2+1)^2} = -1$. Rovnica dotyčnice je:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \Rightarrow \quad y = -(x+2) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x - 3$$

A rovnica normály:

$$y = \frac{1}{f'(x_0)}(x_0 - x) + f(x_0) \quad \Rightarrow \quad y = -(-2 - x) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

2. (3 body) Napíšte Taylorov polynóm rádu $n = 3$ funkcie $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ v $x_0 = 0$.

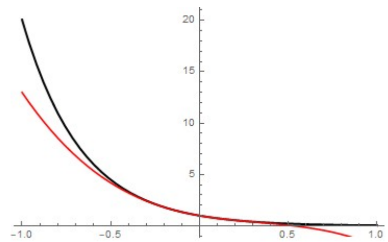
Riešenie: Vypočítame všetky derivácie funkcie f až po tretiu a dosadíme do nich hodnotu $x_0 = 0$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = \mathrm{e}^{-3\cdot 0} = 1$$
$$f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = -3\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = -3$$
$$f''(x) = 9\mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad f''(0) = 9\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = 9$$
$$f'''(x) = -27\mathrm{e}^{-3x} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0) = -27\mathrm{e}^{-3\cdot 0} = -27$$

Dosadíme do vzorca:

$$T_0^3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$T_x^3(x) = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3$$



Obr. 5: Graf Taylorovho polynómu (červená) k funkcii z príkladu 2.B.

3. (4 body) Nájdite maximá/minimá funkcie $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2$ a intervaly, na ktorých rastie/klesá.

Riešenie: Vypočítame prvú deriváciu funkcie:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x$$

Výraz rozložíme na súčin, aby sme určili korene (nulové body):

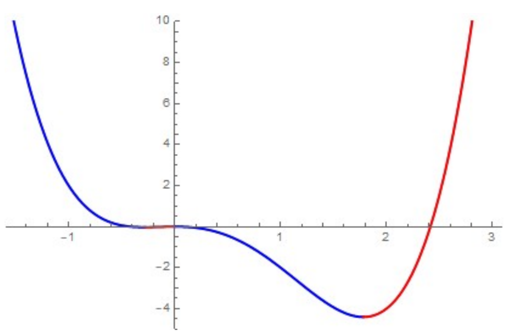
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x = 2x(2x^2 - 3x - 1) = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$f'(x) = 2x\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) = 0$$

Kritické body sú tri: $x = 0$ a $x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$. Ďalej vieme určiť, že $\frac{3-\sqrt{17}}{4} < 0 < \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Zostavíme teda tabuľku pre znamienka výrazov v súčine:

	$(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4})$	$(\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 0)$	$(0, \frac{3+\sqrt{17}}{4})$	$(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Funkcia je teda rastúca pre $x \in (\frac{3-\sqrt{17}}{4}, 0) \cup (\frac{3+\sqrt{17}}{4}, \infty)$ a klesajúca pre $x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}) \cup (0, \frac{3+\sqrt{17}}{4})$. V bodoch $x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$ má lokálne minimá a v $x = 0$ lokálne maximum.



Obr. 6: Graf funkcie z príkladu 3.B s vyznačenými intervalmi rastúcosti (červená) a klesajúcosti (modrá)