Manipulácia s maticami

Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

pre všeobecné $m, n \in \mathbb{N}$ sčítavame s maticami rovnakého rozmeru po zložkách:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & ... & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

rovnako aj násobíme skalárom $s \in \mathbb{R}$:

$$s\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & ... & sa_{1m} \\ sa_{21} & sa_{22} & ... & sa_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sa_{n1} & sa_{n2} & ... & sa_{nm} \end{pmatrix}.$$

Násobiť matice môžeme len ak sa rovnajú ich "vnútorné rozmery", t.j.: ak počet stĺpcov matice vľavo je totožný s počtom riadkov matice vpravo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}_{(n\times m)} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mk} \end{pmatrix}_{(m\times k)}.$$

Výsledkom je matica rozmeru $(n \times k)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots+a_{1m}b_{m2} & \dots & a_{11}b_{1k}+a_{12}b_{2k}+\cdots+a_{1m}b_{mk} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2m}b_{m2} & \dots & a_{21}b_{1k}+a_{22}b_{2k}+\cdots+a_{2m}b_{mk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots+a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+\cdots+a_{nm}b_{m2} & \dots & a_{n1}b_{1k}+a_{n2}b_{2k}+\cdots+a_{nm}b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Aby ste pochopili ako sú spolu jednotlivé prvky matíc násobené a kde sa sučty týchto násobkov vo výslednej matici nachádzajú, označte si v pôvodných maticiach jednotlivé členy farebne a sledujte indexy.

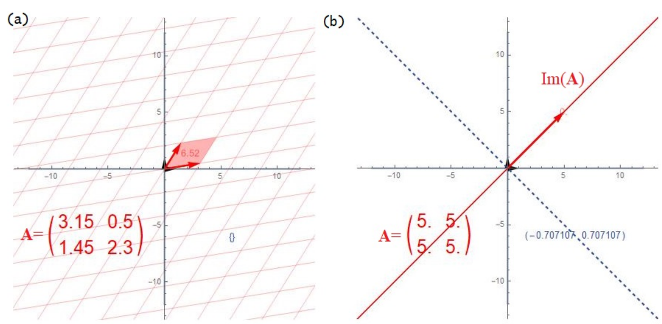
Spôsoby riešenia lineárnych sústav

Vo všeobecnosti môžeme mať n rovníc s m neznámymi, teda:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \quad\; \vdots \quad\;\; \ddots \quad\; \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = b_n \end{gathered}$$

ktorých maticový tvar je:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$



Obr. 1: (a) lineárny operátor deformuje rovinu $\mathbb{R}^2$ tak, že každý bod má svoj jednoznačný vzor. (b) lineárny operátor zobrazí všetky body roviny na priamku $y = x$. Na jeden bod tejto priamky sa teda zobrazí nespočítateľne veľa bodov pozdĺž normály na priamku v takomto bode.

avšak pre jednoduchosť budeme mať v príkladoch **nanajvýš** $m = n = 3$.

Prípady, ktoré môžu nastať

Keďže je v uvedenej úlohe nespočítateľne veľa možností, z ktorých nie každá vedie k jednoznačnému riešeniu, definujeme si jednotlivé možnosti.

Maticu $\mathbf{A}$ chápeme ako lineárny operátor[1] pôsobiacu na vektor neznámych $\mathbf{x}$, ktorý nám zobrazí na vektor pravých strán $\mathbf{b}$. Tento operátor však môže aj zobraziť viac ako len jeden vektor $\mathbf{x}$ na vektor $\mathbf{b}$, alebo dokonca nemusí existovať vektor $\mathbf{x}$, ktorý by tento operátor vedel na $\mathbf{b}$ zobraziť.

Rozlišujeme teda prípady kedy:

1. Sústava má práve jedno riešenie. To sa stane práve ak sa operátor $\mathbf{A}$ správa tak ako na Obr. 1 (a).

2. Sústava má nekonečne veľa riešení. To nastane ak sa operátor $\mathbf{A}$ správa tak ako na Obr. 1 (a) a

[1]taký, do ktorého keď vložíme lineárnu kombináciu, dostaneme tú lineárnu kombináciu obrazov s rovnakými koeficientami: $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{Ax} + \beta\mathbf{Ay},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. V jednoduchosti povedané: lineárny je taký operátor, ktorého výstup narastie o rovnaký diel ak o rovnaký diel navýšime ľubovoľný vstup.

zároveň vektor neznámych $\mathbf{b}$ leží v podpriestore $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$, ktorý nazývame obraz $\mathbf{A}$, čiže množinu obrazov všetkých bodov.

3. Sústava nemá riešenie, ak vektor neznámych $\mathbf{b}$ *neleží* v podpriestore $\mathrm{Im}(\mathbf{A})$. Neexistuje teda, že by $\mathbf{A}$ zobrazil ktorýkoľvek bod priestoru do $\mathbf{b}$.

Pre operátor $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ktorý má pre každú pravú stranu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jednoznačný vzor, platí $\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$. Vo viac ako 2D priestoroch môže mať obraz operátora $\mathbf{A}$ o viac ako jeden rozmer menej, teda 3D priestor môže zobraziť nielen na 2D rovinu, ale aj na jednu 1D priamku prechádzajúce počiatkom. Ak platí prípad (2.), pribudne nám práve toľko nezávislých neznámych parametrov $t_1, t_2, ..., t_r \in \mathbb{R}$ koľko rozmerov má množina bodov, ktoré sa zobrazia na $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(\mathbf{A})$, aby sme pomocou nich vyjadrili ľubovoľné riešenie.

Prístup 1: Gaussova Eliminácia

Princíp spočíva v tom, že zostrojíme tzv. rozšírenú maticu sústavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right) = (\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

ktorú pomocou ekvivalentných riadkových/stĺpcových operácii upravíme do horného trojuholníkového tvaru:

$$(\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & ... & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & ... & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \tilde{a}_{nn} & \tilde{b}_n \end{array}\right)$$

pričom prvky s vlnovkou $\sim$ sú výsledkami týchto úprav:

1. Výmena riadkov $R_i \leftrightarrow R_j$ alebo stĺpcov $S_i \leftrightarrow S_j$.

2. Lineárna kombinácia riadkov: $R_i' = \alpha R_i + \beta R_j,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (čítaj: nový i-ty riadok je α-násobkom i-tého a β-násobkom j-tého riadka) alebo stĺpcov $S_i' = \alpha S_i + \beta S_j$.

Riadky a stĺpce matíc sú vektory v priestore príslušného rozmeru, všetky operácie teda prebiehajú **po zložkách**.

Po dosiahnutí horného trojuholníkového tvaru $(\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})$ postupne vyjadrujeme neznáme od konca, začínajúc rovnicou $\tilde{a}_{nn} x_n = \tilde{b}_n \ \Rightarrow x_n = \tilde{b}_n / \tilde{a}_{nn}$ postupným dosádzaním do vyšších rovníc.

Ak platí, že v nejakom kroku úpravy rozšírenej matice $(\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})$ na horný trojuholníkový tvar $(\tilde{\mathbf{A}}|\tilde{\mathbf{b}})$ je nejaký riadok R_i lineárnou kombináciou iných, t.j.: $R_i = \alpha_1 R_{j_1} + \cdots + \alpha_k R_{j_k},\ 1 \leq j_1, \ldots j_k \leq n$, napríklad $R_3 = 2R_2$, takýto riadok máme navyše, t.j. máme navyše celú rovnicu. Rozmer sústavy teda klesne o jeden.

To znamená, že máme prípad (2.) Sústava má ∞ veľa riešení. Napr:

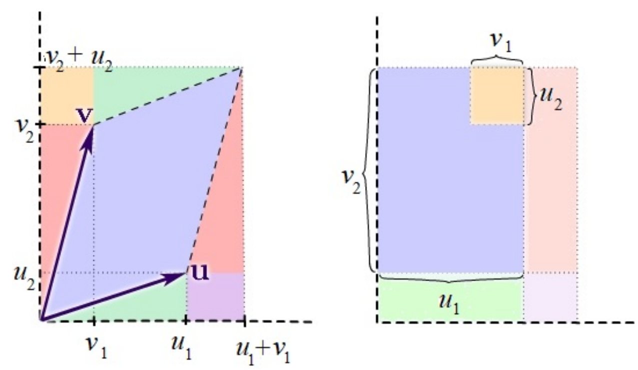
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -6 & -16 & 14 \\ 0 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

Vzhľadom nato, že posledná rovnica $3x_2 + 8x_3 = -7$ má dva nezávislé neznáme parametre (je to rovnica priamky), vyjadríme pomocou reálneho parametra jednu neznámu, napr. $x_3 = t \in \mathbb{R}$, a z rovnice $3x_2 + 8t = -7$ vyjadrujeme $x_2 = -(7+8t)/3$ a ďalej x_3. Ak by sme mali tri neznáme v poslednej rovnici, musíme použiť dva nezávislé parametre, atď.

Špeciálny prípad kedy pridávame parameter je ak máme nulový stĺpec:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -16 & 14 \\ 0 & 0 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

Znamená to, že pri násobení vektora neznámych $(x_1, x_2, x_3)^\top$ je zložka x_2 vždy násobená nulou a teda za ňu možno dosadiť akúkoľvek hodnotu $t \in \mathbb{R}$.



Obr. 2: Geometrická interpretácia determinantu matice so zložkami určenými vektormi $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^2$.

Ak však platí takmer to isté, až na lineárnu kombináciu v pravých stranách, čiže napr.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -6 & -16 & 18 \\ 0 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right)$$

znamená to, že pripočítaním polovice predposledného riadka k poslednému dostaneme nezmyselnú rovnicu $0 = 2$, teda sústava nemá riešenie.

Determinant - hodnota predurčujúca správanie A

Ak operáto $\mathbf{A}$ mení priestor, potom nejakým spôsobom zmení aj jednotkovú plochu určenú vektormi $\mathbf{e}_1 = (1,0)^\top$ a $\mathbf{e}_2 = (0,1)^\top$. Vektory štandardnej bázy $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$ sa môžu pôsobením $\mathbf{A}$ transformovať tak, že rovnobežník, ktorý z nich vznikne zmení ako plošný obsah tak aj orientáciu. Ak sa zmení poradie týchto vektorov, plošný obsah mení znamienko. Výpočet (znamienkového) plošného obsahu takéhoto všeobecného rovnobežníka možno vidieť naznačený na Obr. 2 pre vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

Takáto znamienková miera rovnobežnostena určeného bázovými vektormi lineárneho operátora nazývame determinant. Pre matice 2×2 máme:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

a pre matice 3×3 používame tzv. Sarrusovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Všimnime si, že pre rozmer 2 aj pre 3 vždy permutujeme druhé indexy prvkov a striedajú sa nám znamienka podľa $(-1)^I$ kde I je počet inverzii (výmen) každej permutácie. To platí analogicky aj pre rozmery vyššie ako 3.

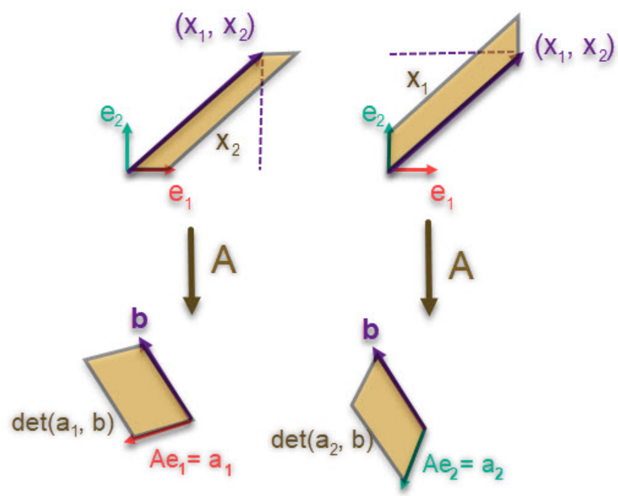
Ak je determinant štvorcovej matice rovný 0, máme jeden alebo viac riadkov alebo stĺpcov navyše, t.j.: nejaké vektory tvoriace rovnobežnosten sú lineárne závislé (splývajú spolu), teda znamienková miera je nulová. Ide o relatívne jednoduchý spôsob ako zistiť vlastnosti riešenia systému len pomocou jeho matice.

Prístup 2: Zmiešané determinanty a Cramerovo pravidlo

Ak $\det \mathbf{A}$ je znamienková miera rovnobežnostena tvoreného riadkovými resp. stĺpcovými vektormi matice $\mathbf{A}$, potom pre systém 2×2:

$$|\mathbf{A}_1| = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad |\mathbf{A}_2| = \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

sú znamienkové plošné obsahy rovnobežníkov medzi vektorom pravej strany $\mathbf{b}$ a bázovými vektormi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Ak $\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \neq 0$, t.j. plošný obsah bázového rovnobežníka je nenulový, možno ním normovať rovnobežníky určené verktormi z $\mathbf{A}_1$ a z $\mathbf{A}_2$. Uvedomíme si však, že bázové vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$ sú obrazmi vektorov štandardnej bázy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a tiež, že znamienkove plošné obsahy medzi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a vektorom neznámych $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ sú vďaka jednotkovej základni samotné neznáme súradnice x_1 a x_2 vidíme, že pre ich vyjadrenie z tejto geometrickej analógie (znázornenej na Obr. 3) ich stačí podeliť celkovým determinantom $\det \mathbf{A}$.



Obr. 3: Geometrická interpretácia Cramerovho pravidla.

Tzv. Cramerovo pravidlo hovorí, že (aj pre viacrozmerné systémy) s det $\mathbf{A} \neq 0$ môžeme neznáme jednoducho vyjadriť pomocou $n+1$ vypočítaných determinantov:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}\ , \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|},\ \dots\ x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|}.$$