Kapitola 2

Cvičenia z Matematiky 1: Diferenciálny počet funkcii jednej reálnej premennej

2.1 Matematika 1: Diferenciálny počet - Riešené príklady:

Nasledujúce príklady boli zostavené za účelom objasnenia postupov pre tých, ktorí na cvičení nepochopili, čo robiť a ako postupovať. Odporúčam každému z tejto kategórie podrobne prejsť všetky riešené príklady (najlepšie poznámkovaním), aby základnú myšlienku pochopili a potom si ju aj vyskúšali v neriešených cvičeniach. Potrebné vzorce a pravidlá si dohľadajte v prednáškach, resp. v iných dostupných zdrojoch.

V prípade, že by ste niečomu nerozumeli alebo dokonca ak by tí šikovnejší z Vás našli v príkladoch chybu, prosím kontaktujte ma na `mcavarga@gmail.com`.

Derivácie mocninových funkcii:

Začnime najjednoduchšími, teda mocninovými funkciami (t.j. funkciami typu: $x \mapsto x^n$):

Príklad 2.1.1. Nájdite deriváciu funkcie f takej, že $f(x) = -x^2 + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$. ($f(x)$ čítaj f v bode x).

Riešenie: Hoci na prvý pohľad iba člen $-x^2$ vyzerá ako mocninová funkcia, pravidlá o algebraických úpravách výrazov s exponentami nám hovoria, že odmocniny $\sqrt[n]{x}$ možno písať ako zlomkové mocniny: $x^{1/n}$ a prevrátené výrazy $1/x$ zas ako výrazy so zápornými exponentami x^{-1}. Takže si celú funkciu prepíšeme:

$$f(x) = -x^2 + x^{\frac{1}{3}} + x^{-1}$$

Túto funkciu už možno zderivovať podľa vzorca pre deriváciu mocninovej funkcie:

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - x^{-2} = -2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}$$

Následne by sa patrilo ešte spätne upraviť novo vzniknuté mocninové výrazy na zlomky a odmocniny:

$$f'(x) = -2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$$

Keďže derivácia súčtu funkcii je totožná so súčtom derivácii jednotlivých členov

Derivácie zložených funkcii:

Príklad 2.1.2. Nájdite deriváciu funkcie f pričom $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$:

Riešenie: Jedná sa o funkciu zloženú s mocninovej funkcie (tretej odmocniny $\sqrt[3]{}$), v ktorej je vložená lineárna funkcia $x \mapsto x-1$. Takže derivujeme ako zloženú funkciu:

$$f'(x) = \left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 1 = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

Podobne derivujeme aj ľubovoľnú mocninovú funkciu:

Príklad 2.1.3. Nájdite deriváciu funkcie f pričom $f(x) = \sqrt[4]{(2x^3+x^5)^3}$:

Podobne ako v predošlom prípade, máme zloženú funkciu. Vnútri $\frac{3}{4}$-vej mocniny máme polynomickú funkciu $x \mapsto 2x^3 + x^5$ až piateho rádu, teda keď zderivujeme vonkajšiu odmocninu, musíme výsledok vynásobiť ešte deriváciou tohto polynómu a nebude to obyčajné násobenie jednotkou ako predtým (derivácia znižuje rád mocniny o 1):

$$f'(x) = \left((2x^3+x^5)^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}(2x^3+x^5)^{\frac{3}{4}-1}(6x^2+5x^4) = \frac{3}{4}(2x^3+x^5)^{-\frac{1}{4}}(6x^2+5x^4) = \frac{3(6x^2+5x^4)}{4\sqrt[4]{2x^3+x^5}}$$

Derivácie súčinu a podielu funkcii:

Môžeme sa samozrejme stretnúť aj s funkciou, ktorá je súčinom alebo podielom iných funkcii.

Príklad 2.1.4. $f(x) = x \ln x$:

Riešenie: Napred derivujeme $x \mapsto x$ a vynásobíme ho nederivovaným logaritmom $x \mapsto \ln x$. Potom pripočítame nederivovanú $x \mapsto x$ a tú vynásobíme derivovaným logaritmom:

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad x > 0$$

Vynásobiť spolu môžeme aj tri funkcie.

Príklad 2.1.5. $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x \sin x$:

Riešenie: Deriváciu počítame analogicky. Napríklad tak, že jeden súčin ,,ozátvorkujemeä považujeme za samostatný člen. Tieto zátvorky potom zas musíme zderivovať kde je treba:

$$f'(x) = (x^2\mathrm{e}^x \sin x)' = (x^2\mathrm{e}^x)' \sin x + (x^2\mathrm{e}^x)(\sin x)' = (2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x)\sin x + x^2\mathrm{e}^x \cos x$$

Výsledok samozrejme môžeme upraviť:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x((2x+x^2)\sin x + x^2\cos x)$$

Príklad 2.1.6. $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$:

Riešenie: Podiel funkcii (za predpokladu, že je výraz v menovateli nenulový) derivujeme pomocou vzorca:

$$f'(x) = \frac{2x\ln x + x^2\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\ln x + x}{\ln^2 x}$$

Príklad 2.1.7. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{arctg} x}{2^x}$:

Riešenie:

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x\mathrm{arctg}x)'2^x + (\mathrm{e}^x\mathrm{arctg}x)(2^x)'}{2^{2x}} = \frac{(\mathrm{e}^x\mathrm{arctg}x + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1})2^x + (\mathrm{e}^x\mathrm{arctg}x)2^x\ln 2}{2^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{2^x}(\mathrm{arctg}x + \frac{1}{x^2+1} + \ln 2\,\mathrm{arctg}x)$$

Logaritmické derivovanie:

Pod pojmom „Logaritmické derivovanie"rozumejme derivovanie funkcii typu $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, teda aj v základe aj v exponente je nejaká funkcia premennej x. Výraz takejto funkcie je treba upraviť, aby sme ho mohli derivovať pomocou nám dostupných pravidiel.

Najprv prepíšeme funkciu do rovnice $y = f(x)^{g(x)}$. Pochopiteľne, ak je x reálna premenná a f aj g produkujú reálne funkčné hodnoty, z pravidiel o exponenciálnych funkciach platí $f(x) \geq 0$ pre všetky x a tým pádom aj samotný výraz na pravej strane musí byť kladný, t.j.: $y > 0$. Za týchto predpokladov možno ľavú aj pravú stranu tejto rovnice vložiť ako argumenty logaritmov, ktoré možno považovať za totožné (keďže je každá logaritmická funkcia prostá = jedno $\ln x$ je obrazom iba jedného x):

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

Podľa pravidla o vynímaní exponenta pred logaritmus možno výraz funkčnej hodnoty $g(x)$ na pravej strane vyňať pred logaritmus:

$$\ln y = g(x) \ln f(x) \tag{2.1}$$

Rovnicu (2.1) možno buď:

1. Derivovať implicitne podľa x (nezabudnime, že y je funkciou x, t.j.: $y(x) = f(x)^{g(x)}$):

$$(\ln y)' = (g(x) \ln f(x))'$$

$$\frac{1}{y} y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

a vyjadriť deriváciu y' z rovnice ako neznámu:

$$y' = y\big(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)\big)$$

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)}\big(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x)\big) \tag{2.2}$$

Alebo **2.** Ľavú aj pravú stranu rovnice (2.1) vložiť ako exponenty do exponenciálnej funkcie:

$$\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$$

A vzhľadom nato, že zložením exponenciálnej a k nej inverznej logaritmickej funkcie dostaneme identitu toho, čo ostalo vnútri:

$$y = \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)} \tag{2.3}$$

potom už len ostáva derivovať (2.3) ako zloženú funkciu a dostaneme výsledok totožný s (2.2).

Príklad 2.1.8. Nájdite deriváciu funkcie f takej, že $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$:

Riešenie: Pre $f'(x)$ stačí použiť výraz v pravej strane (2.2), alebo opakovať vyššie uvedený postup:

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\big(\big(-\frac{1}{x^2}\big) \ln x + \frac{1}{x}\frac{1}{x} \cdot 1\big) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}\big(1 - \ln x\big) = x^{\frac{1}{x}-2}\big(1 - \ln x\big)$$

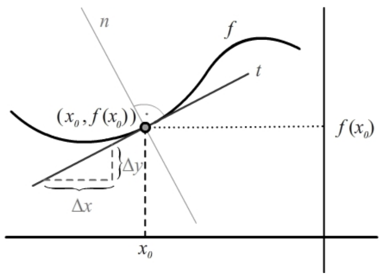
Príklad 2.1.9. $f(x) = (\mathrm{arctg} x)^{\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})}$ pričom $x \geq 1/5$, $x \neq (2k+1)^3 \frac{\pi^3}{40}, k \in \mathbb{Z}$ (podmienky existencie výrazu), $f'(x) =$??:

Riešenie:

$$f'(x) = (\mathrm{arctg}x)^{\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})}\left((\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1}))' \ln(\mathrm{arctg}x) + \mathrm{tg}\sqrt[3]{5x-1}\frac{1}{\mathrm{arctg}x}(\mathrm{arctg}x)'\right)$$

$$f'(x) = (\mathrm{arctg}x)^{\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})}\left(\left(\frac{1}{\cos^2(\sqrt[3]{5x-1})}\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}}\right)\ln(\mathrm{arctg}x) + \mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})\frac{1}{\mathrm{arctg}x}\frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$f'(x) = (\mathrm{arctg}x)^{\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})}\left(\frac{5\ln(\mathrm{arctg}x)}{3\sqrt[3]{(5x-1)^2}\cos^2(\sqrt[3]{5x-1})} + \frac{\mathrm{tg}(\sqrt[3]{5x-1})}{(x^2+1)\mathrm{arctg}x}\right)$$



Obr. 2.1

Lineárna aproximácia funkcie v bode:

Derivácia funkcie f v nejakom bode x_0 jej definičného oboru mi v skratke hovorí ,,ako rýchlo"sa v x_0 mení jej funkčná hodnota. Táto rýchlosť zmeny je popísaná sklonom dotyčnice ku grafu funkcie v (dotykovom) bode $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$. Pozrime teraz na Obr.2.1 a uvažujme, že dotyčnica je vlastne priamka, teda je určená svojou smernicovou rovnicou: $y = kx + q$. Koeficient k (smernicu) už poznáme ak vyčíslime deriváciu v bode x_0, t.j.: $k = f'(x_0)$ ostáva nám určiť hodnotu priesečníka y-ovej osi q. Ten nájdeme dosadením za premenné x a y súradnice jedného bodu, o ktorom s určitosťou vieme povedať, že na priamke leží, a to dotykového bodu $(x_0, f(x_0))$. Takže:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + q \quad \Rightarrow \quad q = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Následne už len dosadíme q do smernicovej rovnice dotyčnice:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

$$t \;:\; y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{2.4}$$

V niektorých prípadoch je potrebné nájsť rovnicu normály ku grafu funkcie f v bode $(x_0, f(x_0))$. Normála je definovaná ako kolmica na dotyčnicu v dotykovom bode, teda jej smernica je rovná $-\frac{1}{f'(x_0)}$ (vo všeobecnosti platí, že dve na seba kolmé priamky majú súčin smerníc rovný $k_1k_2 = -1$). Z toho vieme jednoznačne určiť smernicu normály. Ešte ale potrebujeme vypočítať nový priedečník y-ovej osi, znovu dosadením súradníc dotykového bodu:

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + q$$

$$f(x_0) = -\frac{x_0}{f'(x_0)} + q \quad \Rightarrow \quad q = f(x_0) + \frac{x_0}{f'(x_0)}$$

A teda výsledná rovnica normály je:

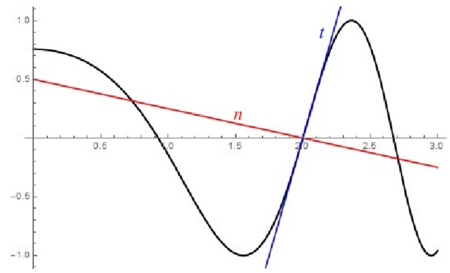
$$n \;:\; y = \frac{1}{f'(x_0)}(x_0 - x) + f(x_0) \tag{2.5}$$

Ak $f'(x_0) = 0$, dotyčnica t je rovnobežná s osou x a normálu n už nemožno kvôli nule v menovateli vyjadriť pomocou vzťahu (2.5). V takom prípade nie je vôbec treba postupovať podľa vzorcov, stačí brať do úvahy, že ak je dotyčnica rovnobežná s osou x, potom bude normála rovnobežná s osou y, t.j.: normálu hľadáme v tvare $x = c$, $c \in \mathbb{R}$ a vzhľadom nato, že vieme akým bodom normála prechádza, vieme aj, že $c = x_0$ teda $n \;:\; x = x_0$.

Takýto postup použijeme aj pri riešení nasledujúcich príkladov:

Príklad 2.1.10. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f takej, že $f(x) = \sin(x^2 - 4)$ v $x_0 = 2$.

Riešenie: V prvom rade vypočítame funkčnú hodnotu $f(2) = \sin(2^2 - 4) = 0$. Potom deriváciu: $f'(x) = \cos(x^2 - 4) \cdot 2x$, ktorú tiež vyčíslime: $f'(2) = \cos(2^2 - 4) \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4$. Takže smernica dotyčnice je $k = 4$ a platí $t : y = 4x + q$. Za x a y dosadíme $x_0 = 2$ a $f(x_0) = 0$ teda: $0 = 4 \cdot 2 + q \Rightarrow \quad q = -8$ a $t \ : \ y = 4x - 8$. Normála ku grafu funkcie v $x_0 = 2$ má smernicu $-\frac{1}{4}$ (lebo je na dotyčnicu kolmá). Teda $n : y = -\frac{1}{4}x + q \quad \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4}2 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$ a teda:



Obr. 2.2

$$t \ : \ y = 4x - 8$$

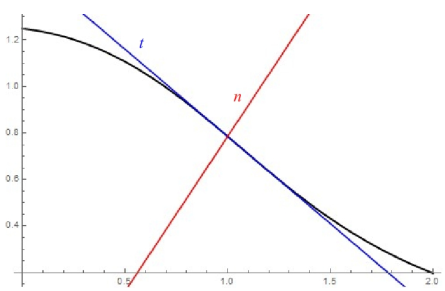
$$n \ : \ y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

A úpravou na všeobecný tvar:

$$t \ : \ -4x + y + 8 = 0$$

$$n \ : \ x + 4y - 2 = 0$$

Príklad 2.1.11. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie f takej, že $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3-x}{x^2+1}\right)$ v $x_0 = 1$.



Obr. 2.3

Riešenie: Nájdeme funkčnú hodnotu $f(1) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3-1}{1^2+1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. Derivujme:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(\frac{3-x}{x^2+1}\right)^2 + 1} \cdot \frac{-1 \cdot (x^2+1) - 2x(3-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2+1) - 2x(3-x)}{(3-x)^2 + (x^2+1)^2}$$

A dosadíme:

$$f'(1) = \frac{-(1^2+1) - 2 \cdot 1(3-1)}{(3-1)^2 + (1^2+1)^2} = \frac{-2-4}{4+4} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$

Takže smernica dotyčnice je $\frac{-3}{4}$ a $q = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} = \frac{\pi+3}{4}$ a teda:

$$t \ : \ y = -\frac{3}{4}x + \frac{\pi+3}{4} \quad \text{resp.} \quad t : 3x + 4y - 3 - \pi = 0$$

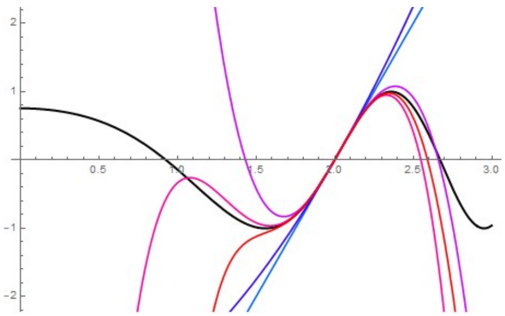
Normála má smernicu $\frac{4}{3}$ a $q = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{3} = \frac{3\pi - 16}{12}$, teda:

$$n \ : \ y = \frac{4}{3}x + \frac{3\pi - 16}{12} \quad \text{resp.} \quad n : 4x + 12y + 16 - \pi = 0$$

Aproximácie funkcii vyšších rádov - Taylorov polynóm:

V mnohých prípadoch nám nemusí stačiť odhadnúť správanie funkcie v okolí nejakého bodu x_0 len lineárne, ale aj funkciou vyššieho rádu. Teda vo všeobecnosti píšeme

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2.6)$$



Obr. 2.4: grafy Taylorových polynómov $T_2^1(x)$ (modrá), $T_2^2(x)$, $T_2^3(x)$, $T_2^4(x)$ a $T_2^5(x)$ (červená) k funkcii z príkladu 2.1.12.

Všimnime si, že ak položíme $n = 1$ prechádza Taylorov polynóm (2.6) do tvaru rovnice dotyčnice v bode x_0, teda (2.4).

Príklad 2.1.12. Nájdime Taylorov polynóm piateho stupňa ($n = 5$) k funkcii $f(x) = \sin(x^2 - 4)$ (z príkladu 2.1.10) v bode $x_0 = 2$.

Riešenie: Spočítajme všetky derivácie až po stupeň 5:

$$f(x) = \sin(x^2 - 4)$$

$$f'(x) = 2x\cos(x^2 - 4)$$

$$f''(x) = 2\cos(x^2 - 4) + 4x^2\sin(x^2 - 4)$$

$$f'''(x) = 12x\sin(x^2 - 4) - 8x^3\cos(x^2 - 4)$$

$$f^{(4)}(x) = 12\sin(x^2 - 4) - 48x^2\cos(x^2 - 4) - 16x^4\sin(x^2 - 4)$$

$$f^{(5)}(x) = 35x^5\cos(x^2 - 4) - 120x\cos(x^2 - 4) - 160x^3\sin(x^2 - 4)$$

a dosádzajme $x_0 = 2$:

$$f(2) = 0\ , \quad f'(2) = 4$$

$$f''(2) = 2\cos(2^2 - 4) + 4 \cdot 1^2\sin(2^2 - 4) = 2$$

$$f'''(2) = 12 \cdot 2\sin(2^2 - 4) - 8 \cdot 2^3\cos(2^2 - 4) = -64$$

$$f^{(4)}(2) = 12\sin(2^2 - 4) - 48 \cdot 2^2\cos(2^2 - 4) - 16 \cdot 2^4\sin(2^2 - 4) = -192$$

$$f^{(5)}(2) = 35 \cdot 2^5\cos(2^2 - 4) - 120 \cdot 2\cos(2^2 - 4) - 160 \cdot 2^3\sin(2^2 - 4) = 35 \cdot 32 - 120 \cdot 2 = 880$$

(Hoci sú derivácie $f', f'', f''', f^{(4)}$ a $f^{(5)}$ napísané už v upravenom tvare, odporúčam ich v rámci precvičenia prepočítať). Potom už len použijeme vzťah (2.6):

$$T_{x_0=2}^{n=5}(x) = 0 + \frac{4}{1}(x-2) + \frac{2}{2}(x-2)^2 - \frac{64}{6}(x-2)^3 - \frac{192}{24}(x-2)^4 + \frac{880}{120}(x-2)^5$$

$$T_{x_0=2}^{n=5}(x) = 4(x-2) + (x-2)^2 - \frac{32}{3}(x-2)^3 - 8(x-2)^4 + \frac{22}{3}(x-2)^5$$

Graf výsledného polynómu je zobrazený na Obr 2.4 červenou.

Tento príklad bol náročný predovšetkým na výpočet derivácii (vyšší stupeň znamená vyššie mocniny, čo má za dôsledok aj vyššie hodnoty v danom bode). Teraz ale taký, ktorý sa dá zvládnúť aj na písomke:

Príklad 2.1.13. Nájdime Taylorov polynóm piateho stupňa ($n = 3$) k funkcii $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ (z príkladu 2.1.10) v bode $x_0 = 0$.

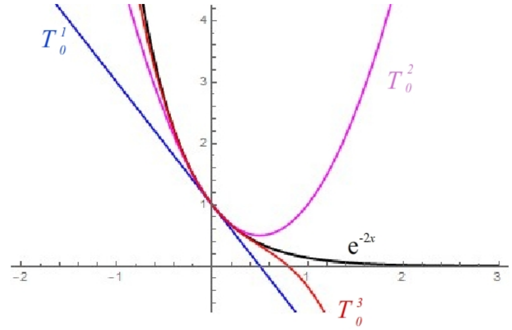
Riešenie: Spočítame derivácie až po rád $n = 3$:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$
$$f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$$
$$f''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x}$$
$$f'''(x) = -8\mathrm{e}^{-2x}$$

A dosadíme $x_0 = 0$

$$f(0) = 1\ , \quad f'(0) = -2\ , \quad f''(0) = 4\ , \quad f'''(0) = -8$$

Teda



Obr. 2.5: grafy Taylorových polynómov $T_2^1(x)$ (modrá), $T_2^2(x)$, a $T_2^3(x)$ (červená) k funkcii z príkladu 2.1.13.

$$T_{x_0=2}^{n=5}(x) = 1 - \frac{2}{1}(x-2) + \frac{4}{2}(x-2)^2 - \frac{8}{6}(x-2)^3$$
$$T_{x_0=2}^{n=5}(x) = 1 - 2(x-2) + 2(x-2)^2 - \frac{4}{3}(x-2)^3$$

L'Hospitalovo Pravidlo:

Toto pravidlo je často omnoho rýchlejším spôsobom riešenia rôznych limít ako algebraické úpravy.

Nech f a g sú funkcie také, že $g(x) \neq 0$ pre všetky x a $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ (alebo iný neurčitý výraz). Potom použitím L'Hospitalovho pravidla derivujeme (osobitne) čitateľ aj menovateľ limity, pokým sa nezbavíme neurčitého výrazu:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$$

Príklad 2.1.14.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

Riešenie: Dosadením $x = 0$ dostávame neurčitý výraz $\frac{0}{0}$, takže derivujeme až kým sa ho zbavíme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\cos^2 x \sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 6\cos x \sin^2 x + 3\cos^3 x}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Príklad 2.1.15.

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg}(\pi x)$$

Riešenie: Napred musíme výraz upraviť na tvar podielu dvoch funkcii:

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg}(\pi x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(\pi x)}$$

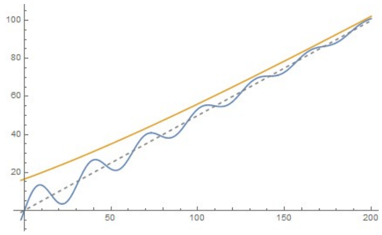
a potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(\pi x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\pi}{\cos^2(\pi x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(\pi x)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

Poznámka: Môžete mať zadanú aj napr. limitu takejto funkcie:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ \ln x$$

($x \to 0^+$ čítaj x sa blíži k 0 sprava), Tu už nie je treba zbytočne derivovať a stačí uvažovať, že ak $x \to 0^+$ odmocnina $\sqrt{x}$ sa zmenšuje až na nulu, zatiaľ čo logaritmus klesá do záporného nekonečna, teda výsledkom je niečo, čo sa ešte rýchlejšie blíži k nule, teda: $\frac{0}{-\infty} = 0$, čo je výsledok limity.



Obr. 2.6: Grafy dvoch rôznych funkcii, blížiacich sa k priamke $y = x/2$ pre $x \to \infty$.

Priebeh funkcie

Ak mám danú ľubovoľnú funkciu f, tak za predpokladu, že je „slušná"(v celom jej definičnom obore spojitá a diferencovateľná aspoň raz) môžem jej priebeh načrtnúť pomocou nástrojov limitného a diferenciálneho počtu.

(1.) Definičný Obor: Je nutné vedieť pre aké hodnoty x má výraz $f(x)$ zmysel.

(2.) Nulové body: Prvý orientačný náčrt grafu funkcie bude určený bodmi, v ktorých je funkcia nulová, teda takých, kde jej graf pretína x-ovú os, t.j.: hľadáme všetky riešenia rovnice $f(x) = 0$ (vzhľadom na možnú zložitosť funkcie ani toto nemusí byť triviálne, ba ani explicitne riešiteľné, no v našom prípade pracujeme s relatívne ľahko riešiteľnými rovnicami).

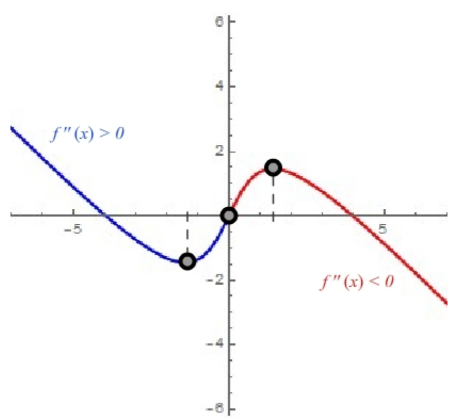
(3.) Asymptoty: Vertikálne asymptoty sú určené ako „diery v def. obore" už v bode (1.), dôležité je vedieť tiež určiť správanie funkcie v nekonečnách. Vo všeobecnosti môže byť takáto asymptota určená smernicovou rovnicou priamky $y = kx + q$. Našou úlohou je postupne určiť koeficienty k a q. Predpokladáme, že sú to také priamky, ktorých rozdiel sa od grafu funkcie f zmenšuje. Napred nájdeme smernicu k ako limitu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = 0 \;/\cdot \frac{1}{x}, x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \tag{2.7}$$

A potom pre q vypočítame limitu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx - q = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = q \tag{2.8}$$

Ak $k = 0$, hovoríme o tzv. *horizontálnej* a ak $k \neq 0, \pm\infty$ zas o *šikmej* asymptote. Funkcia môže mať až dve rôzne asymptoty *so smernicami* k_1, k_2 podľa hodnôt limít v kladnom a zápornom nekonečne. Ak $k = \pm\infty$, funkcia nemá asymptotu so smernicou, teda nemá zmysel určovať ani q.



Obr. 2.7: Funkcia $x \mapsto 3\ \mathrm{arctg}x - x$, ktorá je na intervale $(-\infty, 0)$ konvexná a na $(0, \infty)$ má v bode $-\sqrt{2}$ minimum a v $\sqrt{2}$ maximum. V $x = 0$ je inflexný bod.

(4.) Monotónnosť, kritické body: To sú vlastnosti vyplývajúce z prvej derivácie funkcie, teda f' (v bodoch kde f' existuje). Všetky nulové body prvej derivácie, t.j.: také x, pre ktoré platí $f'(x) = 0$ sa nazývajú *kritické body*. Tieto ešte nemusia byť lokálnymi extrémami.

Vzhľadom nato, že prvá derivácia určuje smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode sú potom také body $x \in D_f$, pre ktoré platí nerovnica $f'(x) > 0$ intervalmi, na ktorých je f rastúca a také $x \in D_f$, pre ktoré zas platí $f'(x) < 0$ sú intervalmi, na ktorých je f klesajúca.

Ak je kritický bod x_0 obklopený zľava intervalom, na ktorom f rastie a sprava takým, kde f klesá, môžem predpokladať, že f má v x_0 *lokálne maximum*. Naopak ak má kritický bod x_0 naľavo interval klesajúcosti a napravo interval rastúcosti f, môžem predpokladať, že má f v x_0 *lokálne minimum.*

(5.) Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body: Ak existuje druhá derivácia funkcie f'', potom analogicky možno určiť jej nulové body $f''(x) = 0$ a intervaly, kde $f''(x) > 0$ a kde $f''(x) < 0$. Tieto podmnožiny def. oboru majú špeciálne mená:

- Tam, kde $f''(x) > 0$ je funkcia *konvexná*, t.j.: jej graf sa „otvára smerom nahor"
- Tam, kde $f''(x) < 0$ je funkcia *konkávna*, t.j.: jej graf je „otvára smerom nadol"
- Tam, kde $f''(x) = 0$ je tzv. *inflexný bod*, t.j.: bod, v ktorom sa funkcia mení z konkávnej na konvexnú alebo opačne.

Z konkávnosti funkcie v kritickom bode x_0 vyplýva fakt, že v ňom má f lokálne maximum a zas z konvexnosti v kritickom bode lokálne minimum (viď Obr. 2.7).

Môže sa stať, že funkcia f bude mať v bode x_0 nulové všetky derivácie až po n-tú (ako napr. mocninové funkcie $x \mapsto x^4$ alebo $x \mapsto x^5$ v $x_0 = 0$). Ak nulovosť derivácii končí v n-tej derivácii a n je párne číslo (ako pri $x \mapsto x^4$), potom má f v tomto bode lokálny extrém, ak je n nepárny rád derivácie, ide o funkciu ako napr. $x \mapsto x^5$, ktorá v tomto bode nemá extrém (iba inflexný bod).

Situácii, ktoré môžu v bodoch (1.) až (5.) nastať je nekonečne veľa. Poďme teda vyskúšať uvedený postup na kompletné vyšetrenie priebehu nasledujúcich funkcii:

Príklad 2.1.16. Pomocou postupu v bodoch (1.) až (5.) načrtnite graf funkcie f takej, že

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Riešenie: Začnime bodom (1.), t.j.: určíme def. obor funkcie f. Výraz $\frac{x}{x^2-1}$ má zmysel, ak je jeho menovateľ nenulový, teda $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$. Čiže $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ resp. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(2.): Ak je to algebraicky možné, nájdeme nulové body funkcie f riešením rovnice: $\frac{x}{x^2-1} = 0$. Tá má jediný nulový bod v $x = 0$. Rozložením def. oboru na intervaly: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ a vyhodnotením výrazu $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$ na každom z nich určíme aj napríklad, že f je na $(-\infty, -1)$ záporná, na $(-1, 0)$ kladná, na $(0, 1)$ záporná a na $(1, \infty)$ znovu kladná (treba si zostaviť tabuľku znamienok $+$ a $-$, aby to bolo prehľadnejšie).

(3.): Tak ako sme určili v (1) má f v bodoch $x = -1$ a $x = 1$ vertikálne asymptoty. Asymptoty so smernicou (tvaru $y = kx + q$) určíme podľa limít (2.7) a (2.8):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2-1}}{x} \overset{x \neq 0}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

Takže máme nanajvýš dve horizontálne asymptoty, ktorých y-ovú súradnicu určíme:

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \text{ v oboch prípadoch, t.j ak } x \to \infty \text{ aj ak } x \to -\infty$$

Rovnicou tejto horizontálnej asymptoty je $y = 0$.

(4.): Nájdeme prvú deriváciu f:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2\, x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-(1 + x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

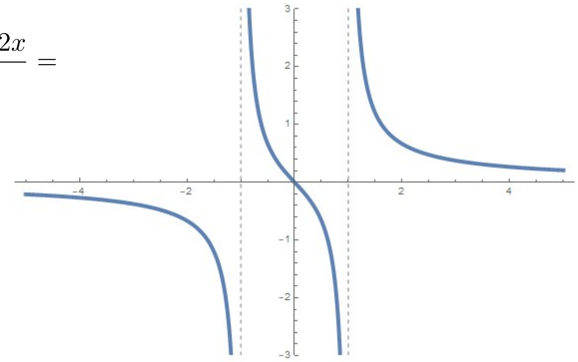
Tá nemá žiaden nulový bod, pretože výraz v čitateli: $-(1+x^2)$ je pre všetky x z D_f záporný. Výraz v menovateli: $(x^2-1)^2$ je pre $x \neq \pm 1$ vždy kladný. Podiel záporného a kladného výrazu je výraz záporný. Funkcia f je teda klesajúca na intervaloch monotónnosti: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ a $(1,\infty)$.

(5.): Ďalej vypočítame druhú deriváciu f:

$$f''(x) = \left(\frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}\right)' = -\frac{2x(x^2-1)^2-(1+x^2)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= -\frac{2x(x^2-1)-4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= -\frac{2x^3-2x-4x^3-4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$



Obr. 2.8: Graf funkcie z príkladu 2.1.16.

Po uvedenej úprave zisťujeme, že f'' má jediný nulový bod v $x=0$. Aby sme určili intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcie, musíme zostaviť tabuľku jednotlivých výrazov v súčine a podieli:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
(x^2+3)	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

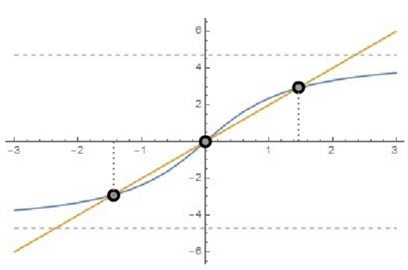
Takže zisťujeme, že f je na $(-1,0)$ a $(1,\infty)$ konvexná, na $(-\infty,-1)$ a $(0,1)$ konkávna a v $x=0$ je inflexný bod.

Týmto dostávame všetky parametre pre náčrt grafu funkcie, ktorý je možné vidieť na Obr.2.8.

Príklad 2.1.17. Načrtnite graf funkcie f takej, že

$$f(x) = 3\ \mathrm{arctg}x - 2\ x$$

Riešenie: (1.): f je definovaná pre všetky reálne čísla: $D_f = \mathbb{R}$.



Obr. 2.9: Priesečníky grafu funkcie $x \mapsto 3\mathrm{arctg}x$ a priamky $y=2x$.

(2.): Riešení rovnice $3\ \mathrm{arctg}x - 2\ x = 0$ môže byť až 3 (viď Obr.2.9). Jedno triviálne riešenie je keď dosadíme $x=0$. Dostávame rovnosť $\mathrm{arctg}0 = 0$. Rovnica má aj zvyšné dve riešenia, pretože dotyčnica ku grafu funkcie $x \mapsto 3\ \mathrm{arctg}x$ v bode $x=0$ má smernicu 3 a priamka $y=2x$ ju má menšiu, teda na konečnom intervale $(0,x_1)$ ju graf $x \mapsto 3\ \mathrm{arctg}x$ nadbehne, zatiaľ čo na $(-x_1,0)$ je $3\ \mathrm{arctg}x$ menšia ako $2x$ (intervaly sú navzájom symetrické podľa nuly, pretože arctg je nepárna funkcia). Exaktne vieme nájsť iba jeden priesečník medzi priamkou $y=2x$ a grafom funkcie $x \mapsto 3\ \mathrm{arctg}x$, a to $x=0$. Zvyšné dve sa dajú nájsť približne (pomocou nejakého numerického riešiteľa) ako $\pm x_1 \approx \pm 1.4511$. Ich presné hodnoty pre nás ale nie sú až tak dôležité.

(3.): Funkcia nemá žiadne ,,diery v def. obore", a teda nemá vertikálne asymptoty. Použitím vzťahu (2.7) nájdeme smernicu k prípadnej asymptoty so smernicou:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\ \mathrm{arctg}x - 2\ x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3\ \mathrm{arctg}x}{x}\right) - 2 = -2$$

Limitu môžeme riešiť aj pomocou L'Hospitalovho pravidla, ale aj úvahou, že pre $x \to \infty$ výraz $\frac{3\ \mathrm{arctg}x}{x} \to \frac{3\ \pi/2}{\infty} = 0$ a analogicky pre $x \to -\infty$ zas $\frac{3\ \mathrm{arctg}x}{x} \to \frac{3\ (-\pi/2)}{-\infty} = 0$ (podľa správania funkcie arctg v nekonečnách). V oboch nekonečnách nám teda výraz $\frac{3\ \mathrm{arctg}x}{x}$ zanikne a $k = -2$.

Ďalej nájdeme priesečníky y-ovej osi a asymptôt so smernicou $k = -2$ zo vzťahu (2.8):

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} 3\ \mathrm{arctg}x - 2\ x + 2\ x = \lim_{x\to\pm\infty} 3\ \mathrm{arctg}x = \pm\frac{3\pi}{2}$$

Rovnice asymptôt so smernicou sú teda $y = -2x - 3\pi/2$ a $y = -2x + 3\pi/2$.

(4.): Nájdeme prvú deriváciu funkcie f:

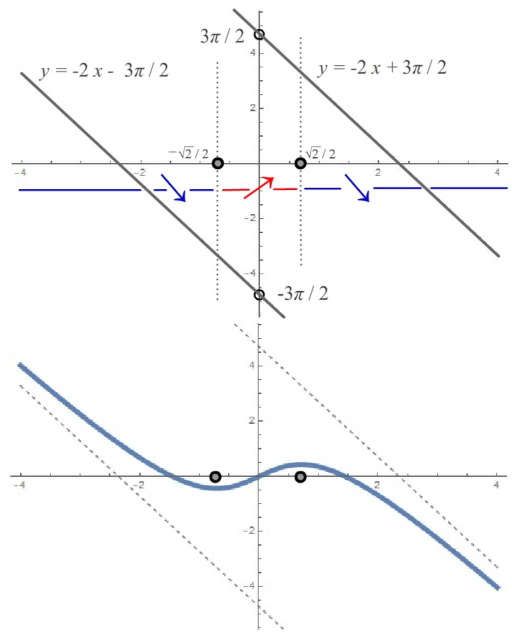
$$f'(x) = \big(3\ \mathrm{arctg}x - 2\ x\big)' = \frac{3}{x^2+1} - 2$$

Najprv hľadáme kritické body funkcie riešením rovnice:

$$\frac{3}{x^2+1} - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-2(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1-2x^2}{x^2+1} = 0$$

Kvadratický výraz v čitateli možno rozložiť na súčin: $1 - 2x^2 = (1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x) = (\frac{\sqrt{2}}{2} - x)(\frac{\sqrt{2}}{2} + x)$ a máme jeho nulové body (korene kvadratickej rovnice $1 - 2x^2 = 0$). Funkcia f má teda kritické body v $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pre posúdenie výsledného znamienka výrazu $\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}-x)(\frac{\sqrt{2}}{2}+x)}{x^2+1}$ nemusíme zostavovať tabuľku, pretože menovateľ $x^2 + 1 > 0$ a graf kvadratickej funkcie $x \mapsto 1 - 2x^2$ je parabola, ktorá sa otvára nadol (viď koeficient -2 pred x^2). Platí teda, že pre $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ je $f'(x) < 0$ (klesá) a pre $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ zas $f'(x) > 0$ (rastie).



Obr. 2.10: (hore) výsledky krokov (3.) - asymptoty so smernicou a (4.) - monótonnosť a kritické body. (dole) Kompletný graf funkcie z príkladu 2.1.17.

(5.): Derivujeme ešte raz:

$$f''(x) = \left(\frac{3}{x^2+1} - 2\right)' = \frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

A keďže $(x^2+1)^2 > 0$ pre všetky $x \in D_f$ podľa správania lineárneho výrazu $-2x$ v čitateli zistíme, že $f''(x) < 0$ pre $x \in (0, \infty)$ (konkávnosť), $f''(x) > 0$ pre $x \in (-\infty, 0)$ (konvexnosť) a $f''(x) = 0$ pre $x = 0$ (inflexný bod).

Funkcia f má teda v bode $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ lokálne minimum nadobúdajúce hodnotu $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\mathrm{arctg}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \sqrt{2} \approx -0.432226$, v $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lokálne maximum nadobúdajúc hodnotu $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2} \approx 0.432226$ a v $x = 0$ inflexný bod.

Výsledný graf môžete vidieť na Obr.2.10.

Poznámka: V rámci šetrenia výpočtového času bude v testoch zadaná len časť z celkového popisu funkcie, napr. len extrémy alebo len konvexnosť, konkávnosť a inflexný bod. Funkčné hodnoty ako $\mathrm{arctg}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2}$ netreba vyčíslovať ako desatinné čísla.

2.2 Matematika 1: Diferenciálny počet - Neriešené príklady:

Pri riešení nasledujúcich príkladov sa môžete inšpirovať postupmi v predošlej kapitole. Všímajte si hlavne postup.

Príklad 2.2.1. Vypočítajte prvé derivácie funkcii:

(a) $f(x) = 2\sqrt{\ln x}$ (b) $f(x) = \sqrt[5]{2\sin^2 x - 3}$ (c) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2-x}{x}\right)$ (d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(e) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{arccotg}^3 x}{4x-3}$ (f) $f(x) = \frac{x \ln^2 x}{x^2-1}$ (g) $f(x) = \frac{x\ \mathrm{tg}^2 x}{x^2-4}$ (g) $f(x) = \sin\left(\frac{5^x}{\sqrt[5]{x^4}+2}\right)$

(h) $f(x) = x^{\sin x}$ (i) $f(x) = \cos^3(5x^4 + 2\sqrt{x^3})$ (j) $f(x) = \mathrm{arctg}(\ln(x^2-3))$ (k) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{arctg}x)^{1+x^2}$

Príklad 2.2.2. Napíšte rovnice dotyčnice a normály ku grafom funkcii v bodoch x_0:

(a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$ (b) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 1$ (c) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{x} - 1\right)$, $x_0 = 1$

(d) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$, $x_0 = 2$ (e) $f(x) = \sin(\ln(5x))$, $x_0 = \frac{1}{5}$ (f) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin 2x}$, $x_0 = \pi$

(g) $f(x) = 2^{x^2-x+1}$, $x_0 = 0$ (h) $f(x) = 2\sin(x-\pi)+1$, $x_0 = 0$ (i) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$, $x = 0$

Príklad 2.2.3. Napíšte Taylorov polynóm n-tého rádu funkcii v bode x_0:

(a) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \pi/2$, $n = 3$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$, $n = 5$

(c) $f(x) = \cos(-3x)$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (d) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $x_0 = 0$, $n = 3$

(e) $f(x) = \sin 4x$, $x_0 = \pi/4$, $n = 3$ (f) $f(x) = \ln\frac{1}{x}$, $x_0 = e$, $n = 4$

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x+8}$, $x_0 = 0$, $n = 3$ (h) $f(x) = \mathrm{arctg}x$, $x_0 = 1$, $n = 3$

Príklad 2.2.4. Vypočítajte limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\mathrm{cotg}x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{1-\cos\pi x - \sin\frac{\pi x}{2}}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ 2^x}{2^x-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{2x}(x^2+3)$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ (\mathrm{arctg}x - \frac{\pi}{2})$ (h) $\lim\limits_{x\to 1} \arcsin(x-1)\mathrm{cotg}(x-1)$ (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

Príklad 2.2.5. Nájdite asymptoty ku grafom funkcii:

(a) $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-2}$ (b) $f(x) = x + 2\mathrm{arccotg} x$ (c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

(d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$ (e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ (f) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

(g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (h) $f(x) = 10\mathrm{e}^{-x/100} \sin \frac{x}{5}$ (i) $f(x) = 10\mathrm{e}^{-\frac{x-50}{100}} + x$

Príklad 2.2.6. Určte na akých intervaloch sú funkcie rastúce, resp. klesajúce a aké majú extrémy (ak ich majú):

(a) $f(x) = 3x^4 + 20x^3 - 6x^2 - 60x$ (b) $f(x) = \frac{1+4x^3}{x}$ (c) $f(x) = \ln(1-x^2)$

(d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x}$ (e) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ (f) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$

(g) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (h) $f(x) = 10\mathrm{e}^{-x/100} \sin \frac{x}{5}$ (i) $f(x) = 10\mathrm{e}^{-\frac{x-50}{100}} + x$

Príklad 2.2.7. Nájdite intervaly konvexnosti a konkávnosti funkcii a ich inflexné body (ak existujú):

(a) $f(x) = x^3 - 27x + 3$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ (c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 3$

(d) $f(x) = x^2 \ln x$ (e) $f(x) = 1 - \ln(x^2 - 9)$ (f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$

(g) $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (h) $f(x) = (1 + x^3)\, \mathrm{e}^{-x^2}$ (i) $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{1/x}$