Doplnkový Seminár z Matematiky: Vzorové Príklady (S riešením)

Príklad 1 (20 bodov). Máme funkciu f_1 definovanú po častiach:

$$f_1 : x \mapsto \begin{cases} x^2 - x - 2\ , & \text{pre } \ x \leq -1 \\ 3\sqrt{1-x^2},\ , & \text{pre } x \in (-1, 1\rangle \\ \log_{1/2}(x^2 - 4),\ , & \text{pre } x > 1 \end{cases}$$

(a) [2 body] Určte jej *definičný obor* D_{f_1} a *obor hodnôt* H_{f_1} (všetky hodnoty, ktoré môže nadobúdať).

(b) [4 body] Čo najpresnejšie, pomocou všetkých kľúčových bodov (priesečníky s x-ovou resp. y-ovou osou) nakreslite jej graf.

(c) [2 body] Určte na akých podmnožinách def. oboru D_{f_1} je funkcia rastúca, resp. klesajúca.

(d) [1 bod] Je f_1 ohraničená (zhora, resp. zdola)? V oboch prípadoch svoje tvrdenie odôvodnite.

(e) [1 bod] Nakreslite graf transformovanej funkcie f_1 s hodnotami $f_1(2x-1)-1$.

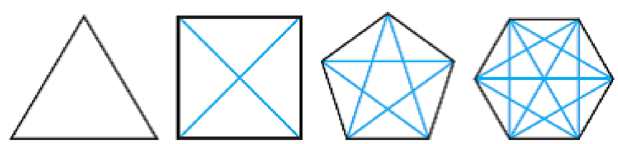
(f) [1 bod] Nakreslite graf transformovanej funkcie f_1 s hodnotami $\frac{1}{3}f_1(-|x|)-3$.

(g) [4 body] Na množine $\mathbb{R} \setminus D_{f_1}$ dodefinujte vetvu funkcie tak, aby bola rozšírená funkcia f_1 všade spojitá a v nanajvýš jednom bode nedefinovaná.

(h) [3 body] Funkciu f_1 zúžte na vhodné podmnožiny $D \subseteq D_{f_1}$ a nájdite k nim inverzné funkcie $f_1\big|_D^{-1}$.

Príklad 2 (10 bodov). Riešte v $\mathbb{R}$ racionálnu nerovnicu:

$$\frac{2x-5}{3x-10+x^2} - \frac{1}{x^2-7x+10} \geq 0$$



Obr. 1: Diagonály konvexných mnohouholníkov (modrá).

Príklad 3 (10 bodov). Konvexný n-uholník je taký mnohouholník s $n \geq 3$ vrcholmi, ktorého hocaké vnútorné body vieme spojiť úsečkou, ktorá je obsiahnutá v jeho vnútri. Dokážte, že každý konvexný n-uholník má $n(n-3)/2$ *diagonál* - úsečiek ktoré ležia v jeho vnútri a spájajú jeho vrcholy (pozri Obr. 1).

Riešenie

Príklad 1

(a) **Def. obor**:

Prvá vetva funkcie f_1 je kvadratická funkcia $x \mapsto x^2 - x - 2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$ teda na prvej vetve pre $x \leq -1$.

Druhá vetva $x \mapsto 3\sqrt{1-x^2}$ je definovaná pre $1 - x^2 \geq 0 \;\Rightarrow (1-x)(1+x) \geq 0$ teda pre $x \in \langle -1, 1\rangle$ čo po odstránení bodu $x = -1$ prislúchajúcemu predchádzajúcej vetve funkcie f_1 určuje def. obor druhej vetvy ako interval $(-1, 1\rangle$.

Tretia vetva je logaritmická funkcia $x \mapsto \log_{1/2}(x^2 - 4)$. Kvadratický výraz v logaritme je kladný $x^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow (x+2)(x-2) > 0$ pre $x > 2$ a $x < -2$. Teda po zúžení na tretiu vetvu $x > 1$ má logartimický výraz zmysel pre $x > 2$.

Výsledný def. obor je zjednotením def. oborov jednotlivých vetiev, t.j.: $D_{f_1} = (-\infty, -1\rangle \cup (-1, 1\rangle \cup (2, \infty) = (-\infty, 1\rangle \cup (2, \infty)$.

Obor hodnôt:

Určme korene ξ_1, ξ_2 (nulové body) kvadratického výrazu $x^2 - x - 2$:

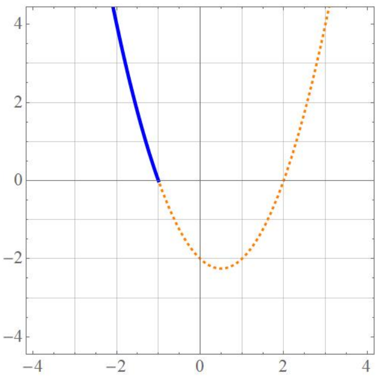
$$\begin{aligned}
&\xi_1 + \xi_2 = 1\ , \quad \xi_1\xi_2 = -2 \\
&\Rightarrow\ \tfrac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = \tfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ (\tfrac{1}{2} - u)(\tfrac{1}{2} + u) = \xi_1\xi_2 = -2 \\
&\Rightarrow\ (\tfrac{1}{2} - u)(\tfrac{1}{2} + u) = -2 \\
&\Rightarrow\ \tfrac{1}{4} - u^2 = -2 \ \Big|\ \cdot 4 \\
&\Rightarrow\ 1 - 4u^2 = -8\ \Rightarrow u^2 = \tfrac{9}{4}\ \Rightarrow u = \pm\tfrac{3}{2} \\
&\Rightarrow\ \xi_1 = \tfrac{1}{2} - u = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2} = -1 \\
&\qquad \xi_2 = \tfrac{1}{2} + u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = 2
\end{aligned}$$

Kvadratická funkcia $x \mapsto x^2 - x - 2$ má korene v bodoch $\xi_1 = -1$ a $\xi_2 = 2$, z ktorých prvý koreň je aj pravým hraničným bodom intervalu $(-\infty, -1\rangle$. Keďže kvadratický člen (x^2) má kladný koeficient, graf tejto funkcie je parabola otvárajúca sa hore. **Pre $x \in (-\infty, -1\rangle$ je teda obor hodnôt prvej vetvy funkcie f_1 interval** $\langle 0, \infty)$ (Overiť, či sa naozaj všetky $x \in (-\infty, -1\rangle$ zobrazia funkciou $x \mapsto x^2 - x - 2$ na kladné hodnoty môžeme aj dosádzaním hodnôt $x \in (-\infty, -1\rangle$ do súčinového tvaru kvadratického výrazu: $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$).

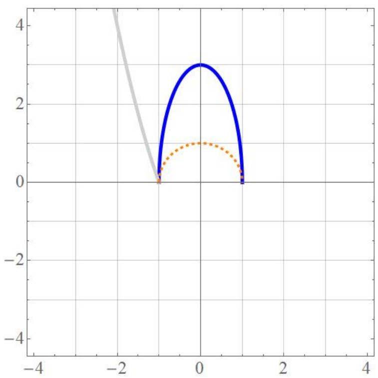
Graf funkcie $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (druhá vetva bez koeficientu 3) je horná polkružnica s polomerom 1 a stredom v počiatku $(0, 0)$. Tento fakt je zrejmý z vyjadrenia neznámej y z rovnice $x^2 + y^2 = 1$. Ak neviem nič o kružniciach v rovine a o ich implicitných rovniciach z hľadania def. oboru druhej vetvy viem, že výraz pod odmocninou musí zostať nezáporný: $1 - x^2 \geq 0$ čo platí pre $x \in \langle -1, 1\rangle$. Z vlastností kvadratickej funkcie $x \mapsto 1 - x^2$ pre tieto hodnoty x nadobúda kvadratický výraz $1 - x^2$ hodnoty len z $\langle 0, 1\rangle$, čo platí aj po odmocnení. Vynásobením výrazu $\sqrt{1-x^2}$ koeficientom 3 sa interval $\langle 0, 1\rangle$ natiahne **na $\langle 0, 3\rangle$, čo je obor hodnôt druhej vetvy funkcie f_1.**

Napokon logaritmická funkcia $x \mapsto \log_{1/2}(x^2 - 4)$ pokrýva všetky reálne čísla $\mathbb{R}$ čo je obor hodnôt tretej vetvy.

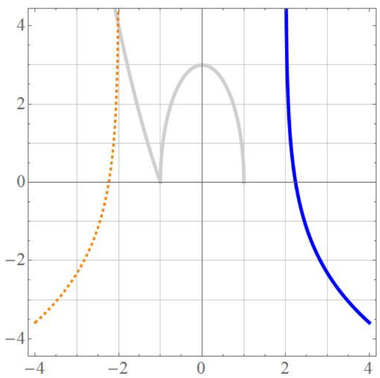
Keďže zjednotenie oborov hodnôt všetkých troch vetiev je $\langle 0, \infty) \cup \langle 0, 3\rangle \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ tak aj $H_{f_1} = \mathbb{R}$.



Obr. 2: (modrá) Prvá vetva funkcie f_1 na intervale $(-\infty, -1\rangle$.



Obr. 3: (modrá) Druhá vetva funkcie f_1 na intervale $(-1, -1\rangle$, (oranžová prerušovaná) Horná polkružnica určená grafom funkcie $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$



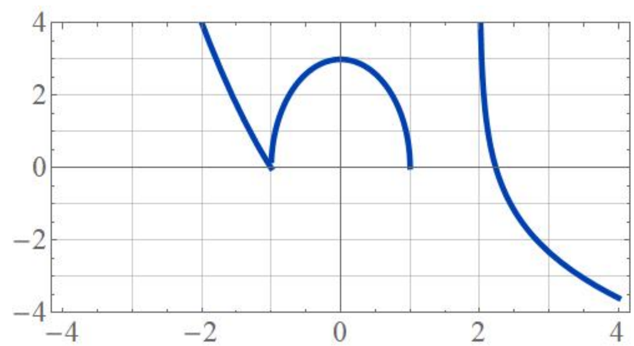
Obr. 4: (modrá) Tretia vetva funkcie f_1 na intervale $(2, \infty)$, (oranžová prerušovaná) ľavá vetva funkcie $x \mapsto \log_{1/2}(x^2-4)$ na intervale $(-\infty, -2)$

(b) **Graf**. Kľúčové body v rovine už máme na všetkých troch vetvách funkcie f_1 určené z úlohy (a). Teoreticky si ešte možno dokresliť chýbajúce časti vetiev funkcie resp. neškálovaná polkružnicu pre druhú vetvu (viď Obr. 2, 3, 4).

Vetvy 1 a 2 sú pre nás triviálne keďže vieme ako vyzerajú paraboly a polkružnica natiahnutá na jednu stranu je polo-elipsa. Logaritmickú vetvu už musíme určiť z iných vlastností: Vieme, že do vnútra logaritmu nemôžeme vložiť hodnotu z intervalu $\langle -2, 2\rangle$ teda časť tohto intervalu bude tvoriť dieru v def. obore: $(1, 2\rangle$. Nulový bod logaritmu, t.j. $x \in (2, \infty)$ pre kt. $\log_{1/2}(x^2-4) = 0$, teda $x^2 - 4 = 1 \;\Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \;\Rightarrow\; x = \sqrt{5} \approx 2.23607$. Ďalej z dôvodu, že základ logaritmu $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ ide o klesajúci logaritmus (viď Obr. 4).

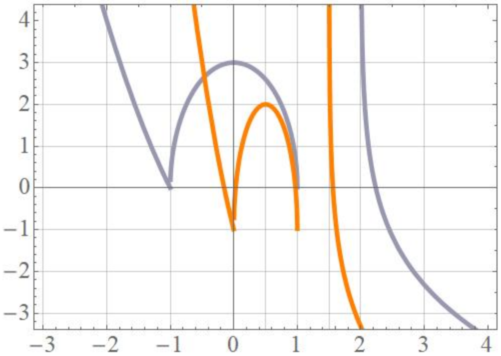
(c) **Vlastnosti**. Def. obor funkcie si rozdelíme na intervaly $D_{f_1} = (-\infty, -1\rangle \cup (-1, 1\rangle \cup (2, \infty)$.

Z vlastností kvadratickej funkcie $x \mapsto x^2 - x - 2$ na $(-\infty, -1\rangle$ a logaritmickej funkcie $x \mapsto \log_{1/2}(x^2-4)$ na $(2, \infty)$ vieme, že na týchto intervaloch ide o striktne klesajúcu funkciu (skúsim dosadiť napr. $-3 < -2 \in (-\infty, -1\rangle$ a $\sqrt{5} < \frac{3}{\sqrt{2}} \in (2, \infty)$ a porovnať funkčné hodnoty). Keďže je graf $x \mapsto 3\sqrt{1-x^2}$ na $\cup(-1, 1\rangle$ horná polo-elipsa, je aj párna, t.j.: $3\sqrt{1-x^2} = 3\sqrt{1-(-x)^2}$ (a samozrejme spojitá). Zo spojitosti a faktu, že $3\sqrt{1-0^2} = 3$ a $3\sqrt{1-(\pm 1)^2} = 0$ potom musí byť na $(-1, 0)$ rastúca a na $(0, 1)$ klesajúca (znovu môžem overiť dosádzaním hodnôt z intervalov $(-1, 0)$ a $(0, 1)$).

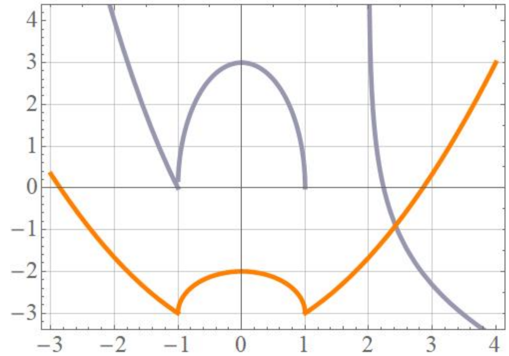


Obr. 5: Graf funkcie f_1 z Príkladu 1.

(d) **Ohraničenosť**. Keďže obor hodnôt funkcie f_1 je $H_{f_1} = \mathbb{R}$ (všetky reálne čísla), f_1 nemá ohraničenie. Ak by sme však vyšetrovali len prvé dve vetvy funkcie f_1 (s grafom parabolického oblúku a polo-elipsy) zo zjednotenia oborov hodnôt vy nám vyšla množina $\langle 0, \infty)$ čo znamená spodné ohraničenie nulou. Ak by sme sa zamerali iba na druhú vetvu (s grafom polo-elipsy) mali by sme dolné ohraničenie nulou a horné ohraničenie 3-kou.



Obr. 6: (e) (oranžová) Graf transformovanej funkcie s hodnotami $f_1(2x-1)-1$. (šedá) Graf pôvodnej f_1.



Obr. 7: (f) (oranžová) Graf transformovanej funkcie s hodnotami $\frac{1}{3}f_1(-|x|)-3$. (šedá) Graf pôvodnej f_1.

(e), (f) **Transformácie funkcii**. Pozri Obr. 6 a 7.

(g) **Doplnenie funkcie so špecifickými vlastnosťami**. Diera v def. obore je množina (interval): $\mathbb{R} \setminus D_{f_1} = (1,2)$. Podmienkami úlohy (g) sú

(I.) Dodefinovaná funkcia $\tilde{f}_1 : D_{\tilde{f}_1} \to \mathbb{R}$ musí byť spojitá na $D_{\tilde{f}_1}$ (a keďže f_1 je spojitá na svojom D_{f_1}, t.j. graf f_1 v žiadnom bode D_{f_1} ,,neskočí príliš prudko", musí byť f_1 rozšírená o $\tilde{f}_1$ tiež všade spojitá).

(II.) f_1 rozšírená o $\tilde{f}_1$ môže mať "dieru"v nanajvýš jednom bode.

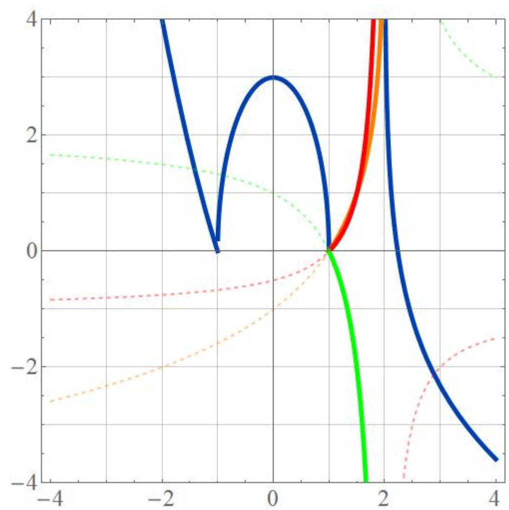
Z podmienok vyplýva, že graf $\tilde{f}_1$ musí v aspoň jednom okrajovom bode intervalu $(1,2)$ koincidovať (splývať) s grafom zvyšnej funkcie f_1. Keďže graf f_1 na logaritmickej vetve $x \mapsto \log_{1/2}(x^2-4)$ pokračuje pre $x \to 2^+$ (čítaj: x sa blíži k 2 sprava) do ∞, možnosti pre $\tilde{f}_1$ nezahŕňajú funkcie, ktorých hodnoty v bode $x=2$ sú definované (a konečné), pretože do nekonečna rastúci logaritmus by pôsobil príliš prudkou zmenou v okolí bodu $x=2$, teda rozšírená funkcia by bola v tomto bode nespojitá. Tento bod si teda nutne musíme vybrať ako ten ,,nanajvýš jeden chýbajúci"bod v $D_{\tilde{f}_1}$ a na opačnom okraji intervalu $(1,2)$ zabezpečiť aby sa hodnoty $\tilde{f}_1$ blížili k $f_1(1)=0$ pre $x \to 1^+$.

Tieto podmienky na $(1,2)$ spĺňajú napr. funkcie:

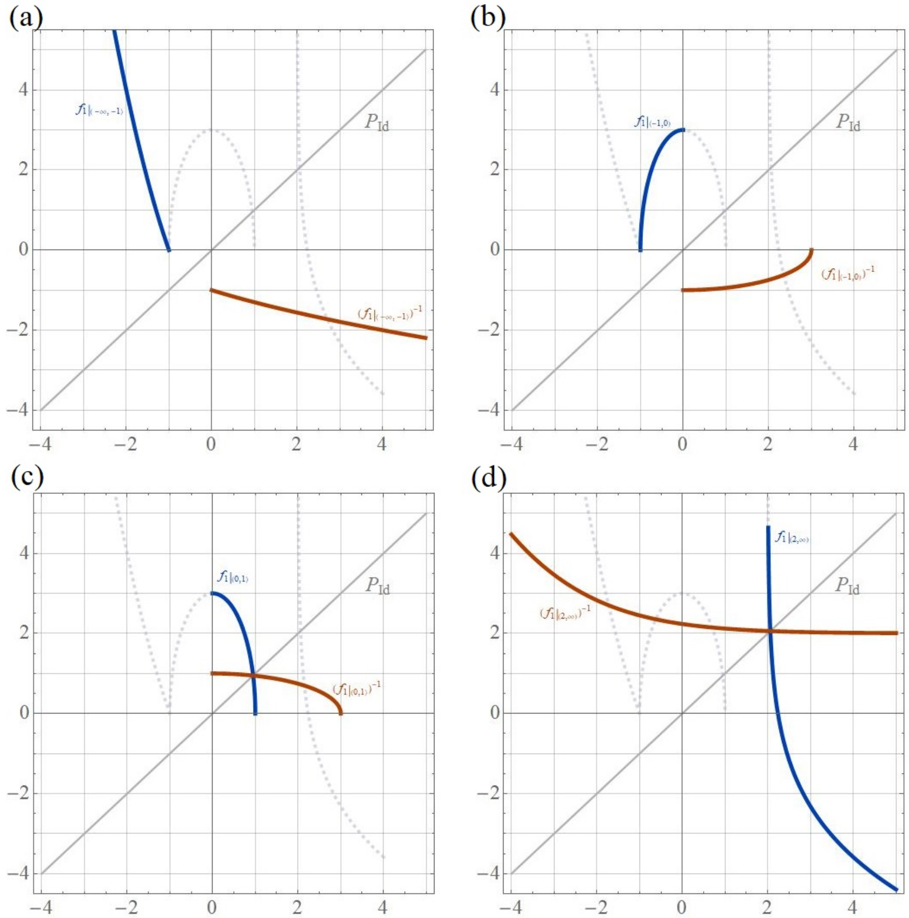
$$\tilde{f}_1^{(R)} : x \mapsto \log_{1/2}(2-x)$$

$$\tilde{f}_1^{(O)} : x \mapsto \frac{1}{2-x} - 1$$

$$\tilde{f}_1^{(G)} : x \mapsto \frac{x}{x-2} + 1$$



Obr. 8: Farebne rozlíšené varianty rozšírenej funkcie: $\tilde{f}_1^{(R)}$ (červená), $\tilde{f}_1^{(O)}$ (oranžová), $\tilde{f}_1^{(G)}$ (zelená)



Obr. 9: Grafy zúžených funkcii $f_1\big|_{(-\infty,-1\rangle}$, $f_1\big|_{(-1,0\rangle}$, $f_1\big|_{(0,1\rangle}$ a $f_1\big|_{(2,\infty)}$ (modrá) a k nim inverzných funkcii $f_1\big|^{-1}_{(-\infty,-1\rangle}$, $f_1\big|^{-1}_{(-1,0\rangle}$, $f_1\big|^{-1}_{(0,1\rangle}$ a $f_1\big|^{-1}_{(2,\infty)}$. (hnedá)

Pre overenie si nakreslíme ich grafy (viď Obr. 8).

(h) **Inverzné funkcie**. Keďže funkcia f_1 nie je prostá, nemôžme k nej násť globálnu inverznú funkciu f_1^{-1}. Vyberieme si teda striktne len jednotlivé intervaly $(-\infty,-1\rangle$, $(-1,0\rangle$, $(0,1\rangle$ a $(2,\infty)$ kde pre zúženia: $f_1\big|_{(-\infty,-1\rangle}$, $f_1\big|_{(-1,0\rangle}$, $f_1\big|_{(0,1\rangle}$ a $f_1\big|_{(2,\infty)}$ vieme nájsť k nim inverzné funkcie: $f_1\big|^{-1}_{(-\infty,-1\rangle}$, $f_1\big|^{-1}_{(-1,0\rangle}$, $f_1\big|^{-1}_{(0,1\rangle}$ a $f_1\big|^{-1}_{(2,\infty)}$.

Graf kvadratickej vetvy funkcie f_1, t.j.: $f_1\big|_{(-\infty,-1\rangle}$ je možno popísať rovnicou $y = x^2 - x - 2$. Aby sme našli predpis pre graf inverznej funkcie $f_1\big|^{-1}_{(-\infty,-1\rangle}$ vymeníme premenné x a y:

$$x = y^2 - y - 2$$

Aby sme z rovnice vyjadrili y, upravíme jej pravú stranu na úplný štvorec:

$$x = y^2 - y + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - 2$$

$$x = \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}$$

a vyjadríme y:

$$\left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = x + \tfrac{9}{4} \qquad \Rightarrow \quad y - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{x + \tfrac{9}{4}}$$

Vyšli nám, samozrejme, dve riešenia, ale my budeme uvažovať len to so záporným znamienkom, pretože chceme zabezpečiť, aby bol graf inverznej funkcie symetrický podľa priamky identity P_{Id} (viď Obr 9 (a)):

$$f_1\big|^{-1}_{(-\infty,-1)} : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{9}{4}}$$

Keďže sú grafy $f_1\big|_{(-1,0\rangle}$ a $f_1\big|_{(0,1\rangle}$ časti oblúkov elipsy popísanej rovnicou $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1$, teda s y-ovou polosou dĺžky 3, budú k nim podľa P_{Id} symetrické krivky časťami oblúkov elipsy s x-ovou polosou dĺžky 3.

Aj bez vedomostí o elipsách viem jednoducho v rovnici $y = 3\sqrt{1 - x^2}$ (popisujúcej hornú poloelipsu) vymeniť premenné x a y a vyjadriť y:

$$x = 3\sqrt{1 - y^2}$$
$$x^2 = 9(1 - y^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - \tfrac{x^2}{9} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{9}}$$

Náčrtom grafov $f_1\big|_{(-1,0\rangle}$ a $f_1\big|_{(0,1\rangle}$ usúdime, že graf $f_1\big|^{-1}_{(-1,0\rangle}$ musí ležať pod x-ovou osou, pretože graf $f_1\big|_{(-1,0\rangle}$ nepretína priamku P_{Id}, a ďalej graf $f_1\big|^{-1}_{(0,1\rangle}$ zas analogicky musí ležať nad x-ovou osou pretože pretína P_{Id}. Kladné a záporné znamienka rovnice pre y teda do výsledných inverzných funkcii priradíme podľa zrkadlovej symetrie cez P_{Id}:

$$f_1\big|^{-1}_{(-1,0\rangle} : \langle 0, 3) \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{9}}$$

$$f_1\big|^{-1}_{(0,1\rangle} : \langle 0, 3) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{9}}$$

Pozri Obr. 9 (b) a (c).

Napokon logaritmickú vetvu $f_1\big|_{(2,\infty)}$ invertujeme taktiež výmenou premenných a vzťahov pre logaritmy:

$$x = \log_{1/2}(y^2 - 4) \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^x = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}(y^2-4)} \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^x = y^2 - 4$$

$$y = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^x + 4}\,.$$

A vzhľadom na obor hodnôt log. vetvy $f_1\big|_{(2,\infty)}$, t.j.: $\mathbb{R}$ a definičný obor $(2, \infty)$ si pre inverznú funkciu $f_1\big|^{-1}_{(2,\infty)}$ tieto množiny vymenia role a vyberieme si teda kladné znamienko pred odmocninou: funkcie symetrický podľa priamky identity P_{Id} (viď Obr 9 (a)):

$$f_1\big|^{-1}_{(2,\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4}$$

Ktorej graf možno vidieť na Obr. 9 (d).

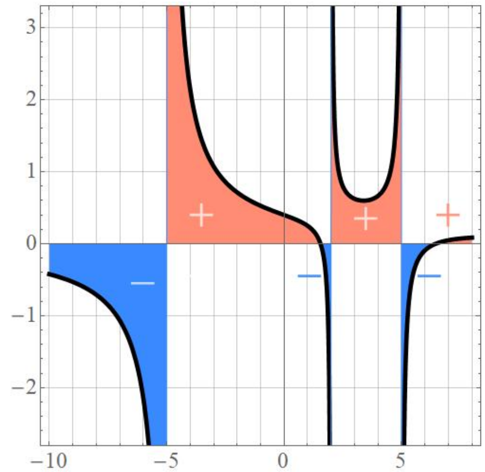
Príklad 2

V prvom rade určíme body, v ktorých výraz $\frac{2x-5}{3x-10+x^2} - \frac{1}{x^2-7x+10}$ nie je definovaný, a to vypočítaním koreňov kvadratických rovníc:

$$3x - 10 + x^2 \neq 0 \qquad\qquad x^2 - 7x + 10 \neq 0$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &\neq \tfrac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-10)}}{2} \\ x_{1,2} &\neq \tfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2} \\ x_{1,2} &\neq \tfrac{-3\pm7}{2} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_{3,4} &\neq \tfrac{7\pm\sqrt{49-4\cdot1\cdot10}}{2} \\ x_{3,4} &\neq \tfrac{7\pm\sqrt{9}}{2} \\ x_{3,4} &\neq \tfrac{7\pm3}{2} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} \neq -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{7}{2} = 2,\ -5 \qquad\qquad x_{3,4} \neq \tfrac{7}{2} \pm \tfrac{3}{2} = 5,\ 2$$



Obr. 10: Hodnoty nerovnosti výrazu $\frac{(x-4+\sqrt{6})(x-4-\sqrt{6})}{(x+5)(x-5)(x-2)}$

Teda body -5, 2 a 5 tvoria "diery"v definičnom obore funkcie $x \mapsto \frac{2x-5}{3x-10+x^2} - \frac{1}{x^2-7x+10} = \frac{2x-5}{(x+5)(x-2)} - \frac{1}{(x-5)(x-2)}$.

Následne upravíme výraz na spoločný menovateľ $(x+5)(x-5)(x-2)$:

$$\frac{(2x-5)(x-5)-(x+5)}{(x+5)(x-5)(x-2)} \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x^2-5x-10x+25-x-5}{(x+5)(x-5)(x-2)} \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x^2-16x+20}{(x+5)(x-5)(x-2)} \geq 0$$

A pre kvadratický výraz v čitateli môžeme bez ujmy celú nerovnicu vydeliť číslom 2:

$$\frac{x^2-8x+10}{(x+5)(x-5)(x-2)} \geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{(x-4+\sqrt{6})(x-4-\sqrt{6})}{(x+5)(x-5)(x-2)} \geq 0$$

Korene $\xi_{1,2} = 4 \pm \sqrt{6}$ ľahko získame z koeficientov kvadratického výrazu v čitateli $x^2 - 8x + 10$ (pomocou $\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) = 4$ a $\xi_1\xi_2 = (4-u)(4+u) = 10$). Číslo $\sqrt{6}$ leží niekde medzi 2 a 3 pretože:

$$\begin{aligned} D < \sqrt{6} < H \quad /^2 \\ D^2 < 6 < H^2 \end{aligned}$$

a nájdeme pre dolné a horné ohraničenie také čísla D^2 a H^2, ktoré vieme ľahko odmocniť (a zároveň sú čo najbližšie k 6):

$$4 < 6 < 9 \quad\Rightarrow\quad 2 < \sqrt{6} < 3$$

Teda ľavý nulový bod $\xi_1 = 4 - \sqrt{6}$ leží niekde medzi 1 a 2 a pravý $\xi_1 = 4 + \sqrt{6}$ medzi 6 a 7.

Os reálnych čísel $\mathbb{R}$ si teda rozdelíme (neuvažujúc body chýbajúce v def. obore funkcie $x \mapsto \frac{(x-4+\sqrt{6})(x-4-\sqrt{6})}{(x+5)(x-5)(x-2)}$, teda -5, 2 a 5) na intervaly:

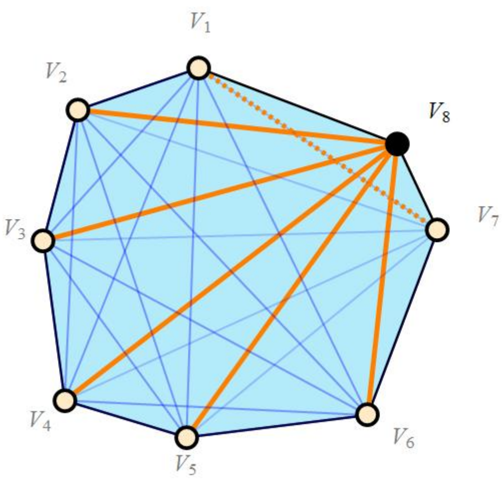
	$(-\infty, -5)$	$(-5, 4-\sqrt{6}\rangle$	$(4-\sqrt{6}, 2)$	$(2, 5)$	$(5, 4+\sqrt{6})$	$\langle 4+\sqrt{6}, \infty)$
$(x-4+\sqrt{6})$	-	-	+	+	+	+
$(x-4-\sqrt{6})$	-	-	-	-	-	+
$(x+5)$	-	+	+	+	+	+
$(x-5)$	-	-	-	-	+	+
$(x-2)$	-	-	-	+	+	+
	-	+	-	+	-	+

Celkový výraz $\frac{(x-4+\sqrt{6})(x-4-\sqrt{6})}{(x+5)(x-5)(x-2)}$ nadobúda nezáporné hodnoty na množine:

$$(-5, 4-\sqrt{6}\rangle \cup (2, 5) \cup \langle 4+\sqrt{6}, \infty)$$

(Pozri Obr. 10).

Príklad 3



Obr. 11: Pridanie ôsmeho vrcholu V_8 ku konvexnému 7-uholníku pridá 6 nových diagonál (oranžová)

Základný prípad: Uvažujme $n = 3$, teda trojuholník, ktorý nemá žiadne diagonály a naozaj dosadením do vzťahu $n(n-3)/2 = 3(3-3)/2 = 0$.

Indukčný predpoklad: Sformulujeme indukčný predpoklad platiaci pre konvexný k-uholník ($k \in \mathbb{N}$): Počet diagonál konvexného k-uholníka je práve $k(k-3)/2$.

Rozšírenie indukčného predpokladu pre $(k+1)$: Konvexný $(k+1)$-uholník tvorený vrcholmi

$V_1, V_2, V_3, ..., V_{k-1}, V_k, V_{k+1}$ možno vytvoriť iba pridaním vrcholu V_{k+1} na vonkajšiu stranu ktorejkoľvek hrany V_iV_{i+1}, kde $1 \leq i < k-1$, a to dostatočne blízko, k tejto hrane, aby neboli vonkajšie uhly $\angle V_{i-1}V_iV_{k+1}$ a $\angle V_{k+1}V_{i+1}V_{i+2}$ neboli ostré (pozri Obr. 11). Tým pádom nám medzi diagonály pribudnú

(1) pôvodná hrana V_iV_{i+1}.

(2) $(k-2)$ diagonál spájajúcich nový vrchol V_{k+1} so všetkými vrcholmi, okrem koncových vrcholov hrany, teda V_i a V_{i+1} (pretože tie by splývali s novými hranami V_iV_{k+1} a $V_{k+1}V_{i+1}$ a neležali by vo vnútri $(k+1)$-uholníka).

Celkový počet pridaných diagonál pri pridaní vrcholu je $(k-1)$, teda:

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Čo je predpokladaný počet diagonál pre $(k+1)$-uholník (po dosadení $(k+1)$ za n vo vzťahu $n(n-3)/2$). $\square$