

Doplnkový Seminár z Matematiky: Príklady na Doma

Pravidlá Vypracovania:

(I.) Príklady vypracovávajúte čitateľne s plným vysvetlením postupu, teda buď podľa vzorových príkladov s riešením alebo použitím akejkoľvek dostupnej literatúry.

(II.) Je možné pracovať skupinovo (dá sa predpokladať, že si budete radiť), ale aby sa zabránilo bezduchému opisovaniu, budem v deň deadlinu náhodne vyvolávať k tabuli ľudí na vypracovanie niektorej bodovanej časti. U koho bude vidno, že tomu neporozumel, bude celkový zisk 40 bodov násobený číslom v intervale $\langle 0, 1 \rangle$ podľa toho ako veľmi je stratený alebo naopak vie svoje riešenie obhájiť. Využite teda zdatnejších spolužiakov/spolužiačky, aby vám prípadné medzery vysvetlili.

(III.) Fixný termín odovzdania pre utorkovú skupinu bude 23.11.2021 a pre stredajšiu skupinu 24.11.2021. Kto chodí na obe cviká a zadanie obdrží skôr, platí preňho termín 23.11.2021. Oneskorené zadania nebudem prijímať.

Príklad 1 (20 bodov). Máme funkciu f_2 definovanú po častiach:

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} -\log_3\left(\frac{1}{2} - x\right), & \text{pre } x \leq 0 \\ 6x - x^2 - 5, & \text{pre } x \in (0, 6) \\ 2x - 17, & \text{pre } x > 6 \end{cases}$$

- (a) [2 body] Určte jej *definičný obor* D_{f_2} a *obor hodnôt* H_{f_2} (všetky hodnoty, ktoré môže nadobúdať).
- (b) [4 body] Čo najpresnejšie, pomocou všetkých kľúčových bodov (priesečníky s x -ovou resp. y -ovou osou) nakreslite jej graf.
- (c) [2 body] Určte na akých podmnožinách def. oboru D_{f_2} je funkcia rastúca, resp. klesajúca.
- (d) [1 bod] Je f_2 ohraničená (zhora, resp. zdola)? V oboch prípadoch svoje tvrdenie odôvodnite.
- (e) [1 bod] Nakreslite graf transformovanej funkcie f_2 s hodnotami $f_2(3x + 1) + 3$.
- (f) [1 bod] Nakreslite graf transformovanej funkcie f_2 s hodnotami $2f_2(|x|) + 5$.
- (g) [4 body] Nájdite vhodnú konštantu $C \in \mathbb{R}$ takú, aby funkcia \tilde{f}_2 modifikovaná v prvej vetve: $\tilde{f}_2|_{(\infty, 0)} : x \mapsto C - \log_3\left(\frac{1}{2} - x\right)$ pre $x \leq 0$ bola v bode $x = 0$ spojitá.
- (h) [3 body] Funkciu f_2 zúžte na vhodné podmnožiny $D \subseteq D_{f_2}$ a nájdite k nim inverzné funkcie $f_2|_D^{-1}$.

Príklad 2 (10 bodov). Riešte v \mathbb{R} racionálnu nerovnicu:

$$\frac{2 - x}{x^2 + x - 12} - \frac{1}{x^2 + 7x + 12} \leq 0$$

Príklad 3 (10 bodov). Uvažujme funkciu $f_3 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f_3(x_1 \cdot x_2) = f_3(x_1) + f_3(x_2)$ pre $x_1, x_2 > 0$. Dokážte, že funkcia f_3 s takouto vlastnosťou spĺňa túto vlastnosť pre súčin ľubovoľného počtu hodnôt x_1, x_2, \dots, x_n , teda:

$$f_3(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = f_3(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_3(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$