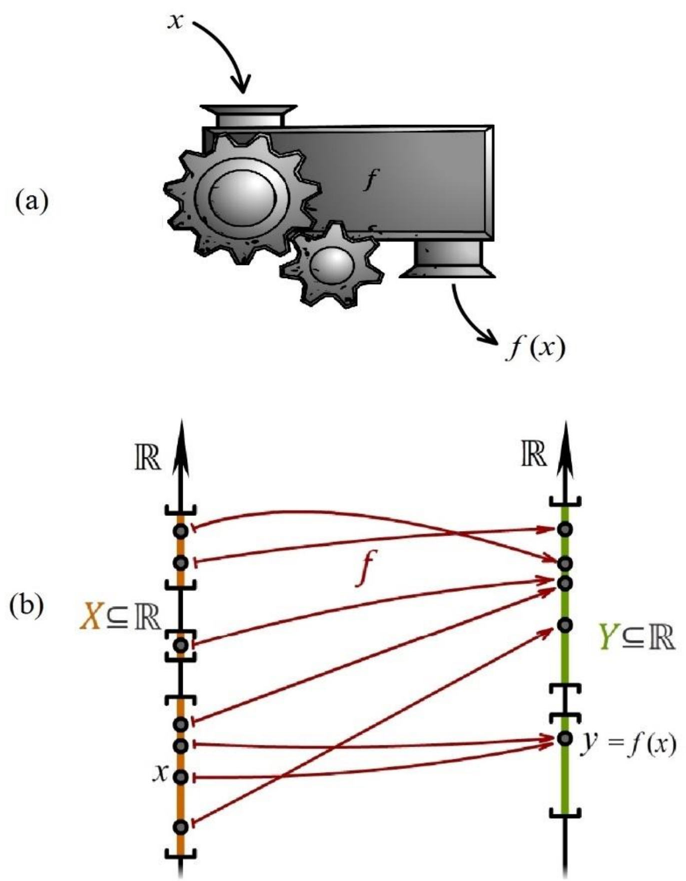
1. Funkcia reálnej premennej

1.1 Funkcia a graf funkcie

Čitateľ sa už možno stretol s pojmom „funkcia“, a to na strednej škole, kde sa bežne učí ako napríklad zakresľovať grafy týchto matematických objektov alebo hľadať ich nulové body. Je ale takisto možné, že sa mnoho študentov začínajúcich štúdium technických odborov, s týmto pojmom ešte nestretlo, prípadne nemajú ani v najmenšom ucelenú predstavu o tom čo tieto objekty predstavujú a na aké účely sa používajú.

Slovo „funkcia“ znie dosť odborne, no vo svojej podstate sa jedná o veľmi jednoduchý a intuitívny objekt. Predstavme si, že máme nejaké vrece s číslami. V takom vreci môžu byť všelijaké čísla, napríklad celé kladné čísla ako 1, 5 , 156 atď. alebo aj záporné -1, -5,... a trebárs aj zlomky: 1/2 , 0.75 , -7.155, ba dokonca čísla iracionálne: π , $-\sqrt{2}$, e ... ,ktoré nevieme napísať ako podiel dvoch celých čísel, a samozrejme nula: 0. Takto sme skonštruovali *číselnú množinu* (skupinu objektov). Každý *prvok* tejto množiny sa v tejto množine vyskytuje práve raz. Teraz si predstavme, že z tohto vreca (množiny) vezmeme za hrsť čísel a hodíme ich do akéhosi stroja (obr.1.1.(a)). Tento stroj zakaždým zožerie jedno číslo a vypľuje na svojom vývode tiež číslo. Niektoré čísla tento stroj spracuje, iné spracovať nedokáže. Všetko záleží od toho ako je tento stroj na čísla postavený. Napríklad si predstavme, že máme stroj, do ktorého hádžeme čísla a vyrába nám z nich odmocniny týchto čísel (teda také čísla, ktoré keď vynásobíme samé so sebou, dostaneme to číslo, ktoré sme vhodili). Takýto stroj nedokáže spracovať napríklad záporné čísla (ak chceme aby nám vypľúval iba reálne čísla).

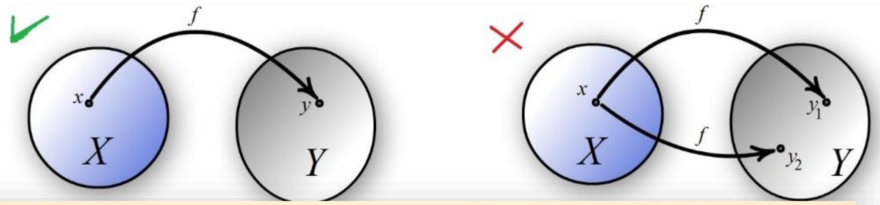


Obr.1.1:

(a) predstava funkcie ako prístroja (black box), ktorý dostáva na vstup objekty x a produkuje hodnoty $f(x)$.

(b) ako si môžeme my predstaviť funkciu reálnej premennej x v zmysle nižšie uvedenej Definície 1.1.1.

Takýto stroj môže v reálnom živote prestravovať kalkulačka alebo počítač. Vo svojej podstate touto predstavou konštruujeme v abstraktnom matematickom vesmíre akýsi objekt (ktorý nazývame funkcia), pôsobením ktorého dostaneme nejakú hodnotu na výstupe. Samozrejme vyžadujeme, aby bolo jednoznačne dané, akú hodnotu pre daný vstup dostaneme na výstupe. Prípady keď z jedného vstupu dostaneme dva rôzne výstupy sú neakceptovateľné (pre naše matematické účely nevhodné).



Definícia 1.1.1 (Funkcia reálnej premennej):
Nech sú X a Y neprázdne množiny, pričom $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Potom takému f, ktoré každému prvku $x \in X$ priradí <u>práve jeden</u> prvok $y \in Y$ hovoríme *funkcia reálnej premennej* x a značíme $f: X \to Y$ (čítaj: f zobrazuje množinu X na množinu Y), resp. $f: x \mapsto y$ (čítaj: f zobrazí prvok x na prvok y). Prvky $y = f(x) \in Y$ nazývame *funkčnými hodnotami*. Množinu X nazývame *definičný obor* (doména)[1] funkcie f a množinu Y nazývame *obor hodnôt*[2] funkcie f.

Poznámka 1.1.1:
Pojem funkcie sa v matematike často zovšeobecňuje na pojem *zobrazenia*. Tým sa môžu akékoľvek abstraktné objekty „zobrazovať" z množiny X do množiny Y (bez ohľadu na to, čo tieto množiny obsahujú), pričom stále platí, že sa každému prvku $x \in X$ priradí práve jeden prvok $y \in Y$.

Pre naše účely ale nie je potrebné tento pojem zatiaľ zovšeobecňovať, pretože sa za ním skrýva pomerne zdĺhavá teória, ktorá presahuje rámec učiva. Takže budeme pracovať s funkciami reálnej premennej podľa Definície 1.1.1, teda s objektami, ktoré v zmysle tejto definície pracujú s reálnymi číslami.

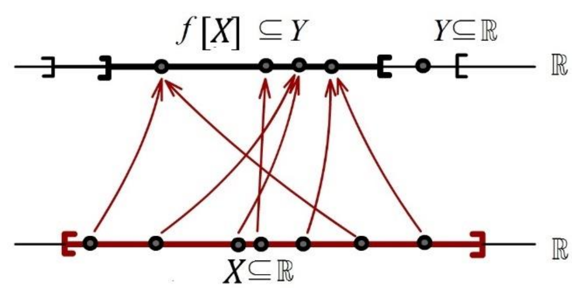
Skúsenejší čitateľ môže namietať, že uvedenej definícii niečo chýba. Nasledujúcu poznámku preto môže nováčik pokojne preskočiť, zatiaľ čo skúsenejší matematik si ju má možnosť prejsť, aby si upresnil potrebné detaily.

Poznámka 1.1.2:

Majme zobrazenie $f: X \to Y$, kde X a Y sú neprázdne množiny, potom:

- f je *surjekcia* ak pre každé $y \in Y$ existuje aspoň jedno $x \in X$ také, že $f(x) = y$. Skrátene:
  $$\forall\ y \in Y; \exists\ x \in X: f(x) = y\,.$$

Inými slovami: f vo všeobecnosti nemusí zobrazovaním zaplniť celú množinu Y (viz. Obr.1.2), no ak sa jedná o surjektívne zobrazenie, tento prípad nastane. Neostane ani jeden prvok z Y, ktorý by nemal nejaké $x \in X$, ktoré by naň f zobrazovalo. V tejto knihe budeme chápať <u>každú</u> funkciu f ako surjektívne zobrazenie medzi dvoma číselnými množinami.



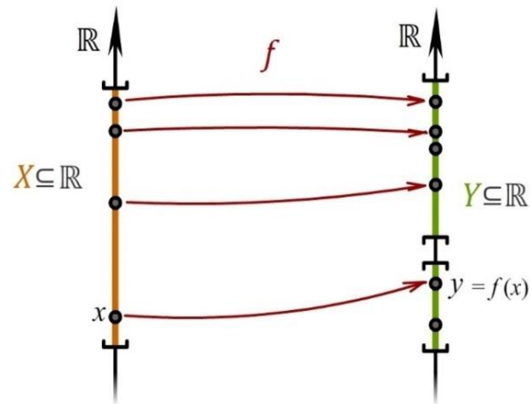
Obr.1.2: funkcia, ktorá <u>nie je</u> surjektívna

Len tak pre zaujímavosť: množina Y sa (hlavne v anglických textoch) vo všeobecnosti označuje ako koobor[3], aby sme odlíšili obor hodnôt $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$, *obraz množiny* X, od množiny Y na, ktorú zobrazujeme.

[1] Angl. **domain**
[2] Angl. **range, image** (obraz)
[3] Angl. **codomain**

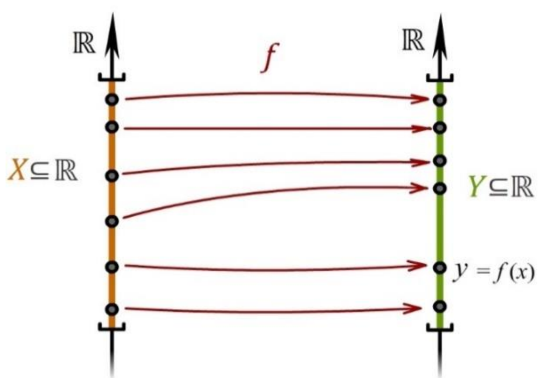
- f je *injekcia* (jedno-jednoznačné, prosté zobrazenie [4]) ak pre každé $y_1, y_2 \in Y$ existujú $x_1, x_2 \in X$ také, že $f(x_1) = f(x_2)$, potom $x_1 = x_2$, inak ak $f(x_1) \neq f(x_2)$, potom $x_1 \neq x_2$.
Skrátene:
$$\forall\ y_1, y_2 \in Y;\ \exists\ x_1, x_2 \in X:\ f(x_1) = f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$
$$\Leftrightarrow\ \forall\ y_1, y_2 \in Y;\ \exists\ x_1, x_2 \in X:\ f(x_1) \neq f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1 \neq x_2$$

Injektívne zobrazenia sú tie, ktoré nikdy nezobrazia dva rôzne $x_1, x_2 \in X$ na jeden a ten istý prvok $y \in Y$. Pre dva rôzne vzory, sú dva rôzne obrazy (viz. Obr.1.3). injekcia nemusí byť nutne aj surjekcia, preto definujeme nasledujúci typ zobrazenia:



Obr.1.3: funkcia, ktorá je injektívna

- f je *bijekcia* ak je surjekcia a súčasne injekcia, teda pre každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ také, že $f(x) = y$. Skrátene:
$$\forall\ y \in Y; \exists!\ \ x \in X: f(x) = y$$



Obr.1.4: funkcia, ktorá je bijektívna

Veľmi dôležitý typ zobrazenia, ktorého množina vzorov je „rovnako veľká" ako množina obrazov, pretože
každý obraz má práve jeden jediný vzor. Typickým príkladom je permutácia (zoraďovanie, číslovanie) nejakých prvkov množiny (je to bijekcia množiny poradových čísel samej na seba). Keď budeme pracovať s bijektívnymi funkciami, budeme ich označovať aj ako „prosté" (viac neskôr).

- f je *identita* ak pre každé $y \in Y$ existuje práve jedno $x \in X$ také, že $x = f(x) = y$. Teda aj $X \equiv Y$.
$$\forall\ \ y \in Y; \exists!\ \ x \in X: x = f(x) = y$$
$$\Rightarrow\ X \equiv Y.$$

Označujeme aj $y = \mathrm{id}(x)$.
Špeciálny prípad bijekcie. Každý prvok množiny sa zobrazí sám na seba.

Pozor! Symbol f musíme chápať ako „operátor", ktorý pôsobí na nejaký prvok $x \in X$. Výsledkom je číslo $f(x) \in Y$ (funkčná hodnota). Symbol f nestotožňujeme (nedávame do rovnosti) s funkčnou hodnotou $f(x)$. Avšak niekedy je jednoduchšie napísať napr. „funkcia $f(x) = xe^x - x\ln x$ " aj keď je tento výraz vlastne funkčnou hodnotou. Jedná sa pochopiteľne o „zneužitie označenia"[5]

Príklad 1.1.1:

Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f: x \mapsto x^2$. Táto funkcia priradí každému $x \in \mathbb{R}$ štvorec tejto reálnej hodnoty $x^2 \in \mathbb{R}$. Definičný obor f je celá reálna množina $\mathbb{R}$, pretože z akéhokoľvek reálneho čísla možno urobiť štvorec, ktorý bude tiež reálne číslo, ale vždy nezáporné, teda oborom hodnôt f je množina $[0, \infty[$. Zapisujeme tiež $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = [0, \infty[$.

[4] Angl. one-to-one
[5] Angl. **abuse of notation**

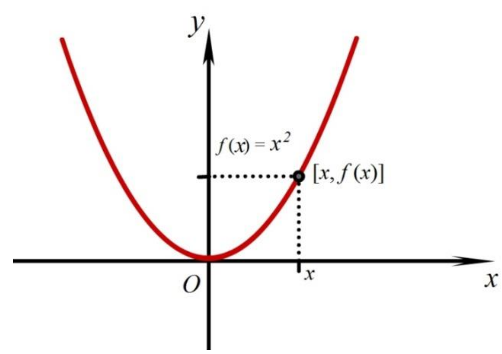
Príklad 1.1.2:
Funkcia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definovaná na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$, ktorá každému prirodzenému číslu $n \in \mathbb{N}$ priradí nejaké reálne číslo $a(n) = a_n$ sa nazýva nekonečná *postupnosť* reálnych hodnôt a_n. Túto funkciu môžeme chápať ako „číslovanie" reálnych hodnôt a_n (od prvého, cez n-tý člen až do nekonečna). Niekedy ju označujeme aj $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ako množinu (funkčných) hodnôt a_n.

Poznámka 1.1.3:
Dve funkcie f a g sa rovnajú, ak sa množinovo rovnajú ich definičné obory a zároveň obe zobrazujú jednotlivé prvky úplne rovnako t.j.: $f(x) = g(x)$ pre všetky x z definičného oboru.

Nato, aby sme vedeli s funkciami pracovať si ich potrebujeme vedieť dostatočne dobre vizualizovať. Obrázok, ukazujúci šípky, ktoré popisujú ktorý prvok nejakej množiny sa zobrazí na nejaký ďalší prvok sú síce intuitívne a matematicky korektné, no keď pracujeme s funkciami na podmnožinách $X \subseteq \mathbb{R}$ takej veľkej množiny ako je množina reálnych čísel, šípky nám už nepomáhajú. Preto sme sa už určite stretli (aj na strednej škole) so zakreslením funkcii do grafov, kde sme na horizontálnu (x-ovú) os nanášali vstupné hodnoty (z definičného oboru) a na vertikálnu (y-ovú) os sme nanášali výstupné (funkčné) hodnoty. Spojením týchto dvoch súradníc sme dostali akúsi čiaru, ktorá nám dáva obraz o tom, ako daná funkcia „vyzerá".

Definícia 1.1.2 (Graf Funkcie):
Nech $f: X \to Y$ je funkcia. Potom množinu všetkých usporiadaných dvojíc $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ nazývame graf funkcie f.

Poznámka 1.1.4:
Symbol $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ predstavuje *kartézsky súčin* dvoch množín reálnych čísel, t.j.: všetky možné usporiadané dvojice (x, y) reálnych čísel $x, y \in \mathbb{R}$. Túto množinu si zvyčajne predstavujeme ako dvojrozmernú rovinu reálnych čísel.



Obr.1.5: Graf funkcie $f: x \mapsto x^2$ vykreslený ako parabola do roviny $\mathbb{R}^2$.

Príklad 1.1.3:
Už zo strednej školy poznáme „lineárne" funkcie tvaru $f: x \mapsto ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Grafom takejto funkcie v $\mathbb{R}^2$ je priamka. Koeficient a sa nazýva *smernica*[6] priamky, ktorá je grafom f a hovorí, že keď sa hodnota x zvýši o 1, funkčná hodnota $f(x)$ sa zmení práve o a. Číslo b ktoré k lineárnej funkcii[7] ax pripočítavame spôsobuje to, že sa graf funkcie posunie práve o hodnotu b v y-

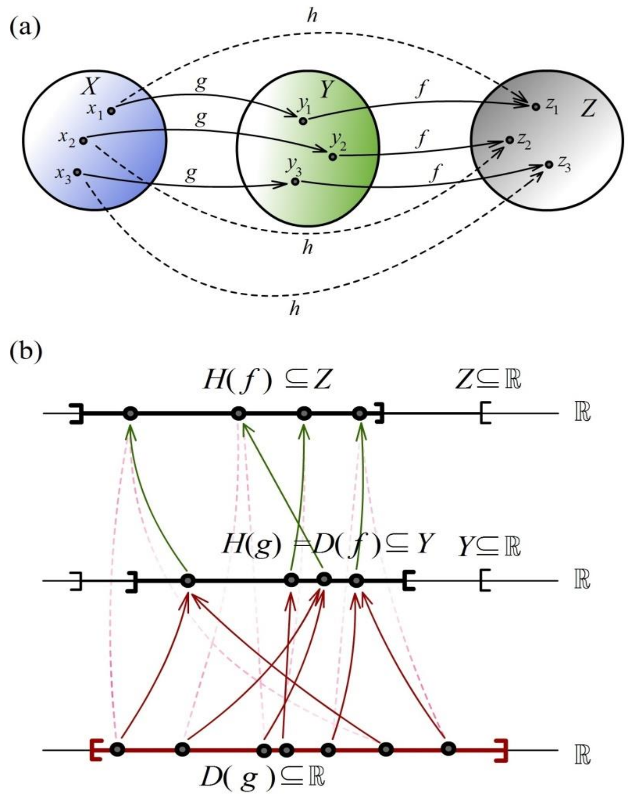
[6] Angl. **slope**
[7] Správne by sa funkcia $f: x \mapsto ax + b$ nemala nazývať lineárna, ale afínna (afínne posunutá o b), len funkcie s $b = 0$ sú skutočne (v zmysle lineárnej algebry) lineárne t.j.: platí $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_1)$ pre každé $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a konštanty $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

ovom smere. Číslo b je v tomto prípade priesečníkom[8] grafu funkcie s y-ovou osou. Odporúčame v rámci opakovania stredoškolského učiva vymyslieť si vhodné reálne čísla a, b a nakresliť si grafy takýchto lineárnych funkcii (napr. na milimetrový papier).

1.2. Zložená a inverzná funkcia

Čo sa stane ak necháme zobraziť obor hodnôt nejakej funkcie $g: X \to Y$ nejakou inou funkciou $f: Y \to Z$? Dostávame tzv. *zloženú funkciu* $h : X \to Z$. Novú funkciu môžeme taktiež označiť $(f \circ g): X \to Z$, kde jasne vidíme z akých funkcii vznikla.

Definícia 1.2.1 (Zložená funkcia):
Nech $g: X \to Y$ a $f: Y \to Z$ sú funkcie. Potom funkciu $h = (f \circ g): X \to Z$ nazývame *zložená funkcia* z funkcii f a g. Funkčné hodnoty značíme $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in Z$. Funkciu g, ktorej obor hodnôt je zobrazovaný funkciou f do Z tiež nazývame *argumentom* f.



Obr.1.6: Zložená funkcia (a) nakreslená pomocou Vennových diagramov a (b) vo forme zobrazenia množín reálnych čísel.

V podstate môžeme do seba naskladať akékoľvek množstvo funkcii. Výsledkom bude stále jedna funkcia, ktorá bude svojim kompletným predpisom priraďovať číslam z jej definičného oboru funkčné hodnoty. Avšak nesmieme zabúdať, že každá nová funkcia obmedzuje hodnoty svojho argumentu práve svojim definičným oborom.

Teda vo všeobecnosti ak hľadáme $f \circ g$ pre $g: X \to Y$ a $f: Z \to W$ musíme nájsť prienik $Y \cap Z$ a ten použiť ako definičný obor funkcie f. Ak je tento prienik prázdna množina ($Y \cap Z = \emptyset$), potom funkcie f a g zložiť nevieme.

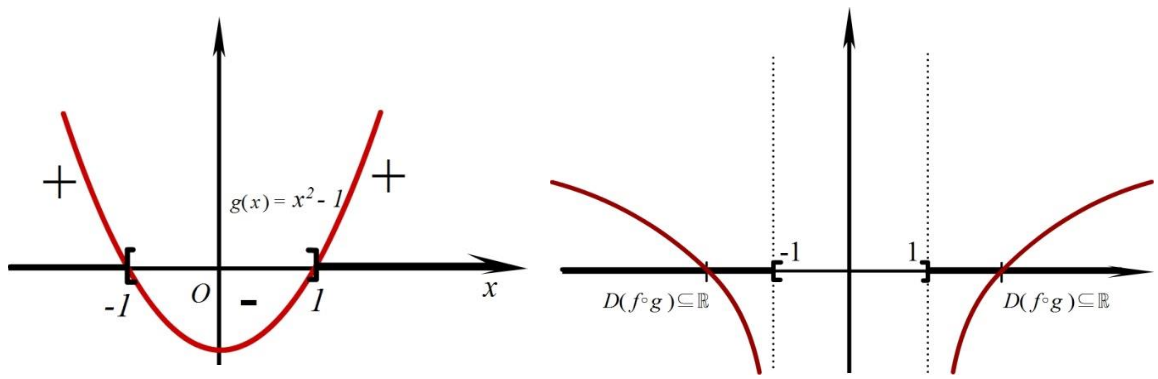
[8] Angl - ***y*-intercept**

Príklad 1.2.1:

Majme $g: x \mapsto -x^2 - 1$ a $f: x \mapsto \ln x$. Definičný obor funkcie g je celé $\mathbb{R}$. Funkcia g ale zobrazuje všetky reálne čísla na čísla záporné, neostro menšie ako -1, t.j.: $H(g) =]-\infty, -1]$ (môžeme vyskúšať dosadiť). To by bol dosť závažný problém ak by sme chceli zložiť funkcie $f \circ g$ (v tomto poradí), pretože výraz $\ln(-x^2 - 1)$ nemožno vyjadriť v reálnych číslach. Argumentom funkcie „ ln “ môže byť iba kladné číslo.

Príklad 1.2.2:

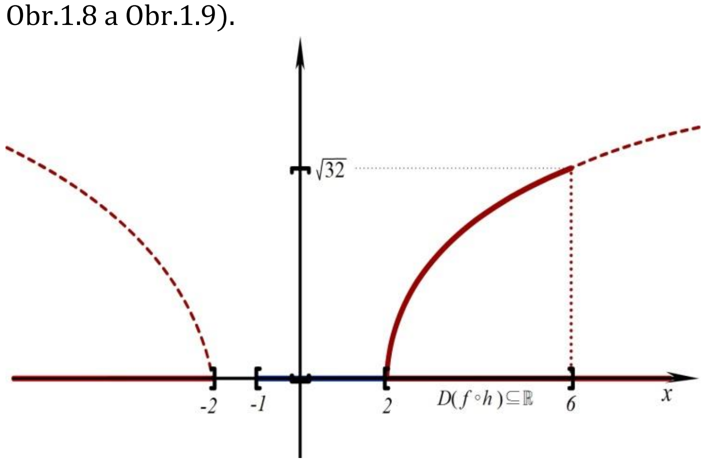
Nech $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $g(x) = x^2 - 1$ a $f:]\,0\,, \infty\,[\to \mathbb{R}$, kde $f(x) = \ln x$. Potom zložená funkcia $(f \circ g) : x \mapsto \ln(x^2 - 1\,)$ má definičný obor $D(f \circ g) =]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \infty[$, čo je množina riešení kvadratickej nerovnice $x^2 - 1 > 0$ (Obr.1.7).



Obr.1.7: (vľavo) argument funkcie f nadobúda kladné hodnoty na množine $]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, \infty[$. Prípustným definičným oborom funkcie $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 1\,)$ (vpravo) je teda táto množina.

Príklad 1.3.2:

Nech $h: [-1\,, 6] \to \mathbb{R}$, kde $h(x) = x^2 - 4$ a $f: [\,0\,, \infty\,[\to \mathbb{R}$, kde $f(x) = \sqrt{x}$ potom funkcia $(f \circ h)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ je definovaná na množine $D(f \circ h) = \{\,[2\,, 6]\,\}$, pretože argument funkcie h musí byť nezáporný a množinou riešení nerovnice $x^2 - 4 \geq 0$ je $]-\infty, -2\,] \cup [\,2, \infty[$ a teda prienik množín $[-1\,, 6] \cap (\ ]-\infty, -2\,]\ \cup\ [\,2, \infty[\ ) = [2\,, 6]$ je definičným oborom zloženej funkcie (viz Obr.1.8 a Obr.1.9).



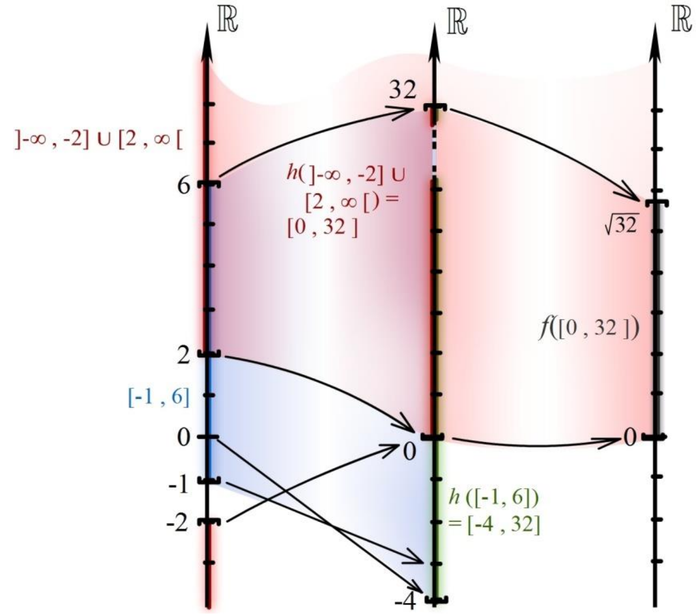
Obr.1.8.:
pre $(f \circ h): [2\,, 6] \to \left[0\,, \sqrt{32}\right]$ vidíme, plnou čiarou vyznačený graf funkcie $(f \circ h)$.

Zdá sa, že už máme vybudovanú celkom slušnú predstavu o tom, ako funkcie zobrazujú jednotlivé podmnožiny reálnych čísel, a že dokážeme na seba naskladať viac funkcii. Čo ak by sme sa ale rozhodli zobrazovanie funkcie „obrátiť“?

Ako prvá sa vynára otázka: čo takéto obrátenie – inverzia. Môže v našom jazyku funkcii znamenať? Jednoducho: Chceme teraz nájsť novú funkciu f^{-1} k funkcii f, ktorou budeme zobrazovať obor hodnôt Y späť na definičný obor X, a to konkrétne tak, že každé $y \in Y$, na ktoré by sa (priamou) funkciou f zobrazilo nejaké $x \in X$, chceme (inverznou) funkciou f^{-1} zobraziť práve na (to pôvodné) $x \in X$.

To, samozrejme, znamená, že ak tieto dve funkcie zložíme (v ľubovoľnom poradí) , môžeme jedine dostať funkciu identity „id“, ktorá zobrazí každé číslo z príslušných definičných oborov samé na seba.

Obr.1.9: Uzavretý interval $[-1\,,6]$ premietne funkcia h do intervalu $[-4\,,32]$ (ak by h zobrazovala celú $\mathbb{R}$, bolo by to do množiny $[-4,\infty[$, pretože najnižšiu hodnotu dosiahne pre $h=0$ a to $h(0)=-4$). Do funkcie f však už musí vstúpiť len nezáporné číslo, teda interval $[0\,,32]$. Vzor tejto množiny podľa zloženej funkcie $(f\circ h)$ je prienik intervalu $[-1\,,6]$ a množiny $]-\infty,-2\,]\cup[\,2,\infty[$ čiže interval $[2\,,6]$.



Poznámka 1.2.1:

Inverzné „operácie“ sa vyskytujú vo všetkých odvetviach matematiky. Či už napr. transformujeme nejaké geometrické útvary, potom napríklad násobíme číslo x jeho obrátenou hodnotou $1/x$, alebo k číslu x pripočítame číslo $-x$, zakaždým dostaneme akýsi prvok „identity“, ktorý má tú vlastnosť, že príslušnou operáciou s ďalšími prvkami nerobí vôbec nič.

Teraz ale narážame na problém: ako vie funkcia f^{-1} zobraziť nejaké $y \in Y$ na „ten správny“ vzor $x \in X$? Veď sa pokojne môže stať, že funkcia f zobrazí dve rôzne $x_1, x_2 \in X$ na to isté $y \in Y$. Definícia 1.1.1 je skonštruovaná tak, že nato, aby bola f^{-1} naozaj funkcia, môže zobrazovať každé y len na jedno x. To znamená, že f nemôže zobraziť dve rôzne $x_1, x_2 \in X$ na to isté $y \in Y$.

Aby sme toto zabezpečili, musíme funkciu f opatriť nasledujúcou vlastnosťou:

Definícia 1.2.2 :

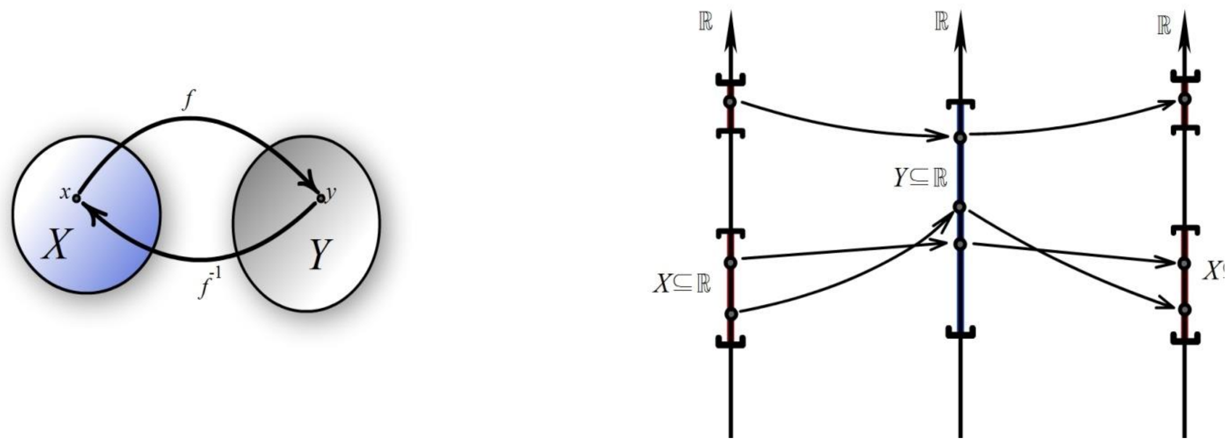
Nech $f: X \to Y$ je funkcia. Potom hovoríme, že f je *prostá* (alebo tiež *bijektívna*), ak pre každé $y \in Y$ existuje <u>práve jedno</u> $x \in X$ také, že $f(x) = y$. Skrátene:

$$\forall\ \ y \in Y; \exists!\ \ x \in X: f(x) = y$$

Teda v jednoduchosti: bijektívna funkcia je funkcia, ktorej každý obraz má práve jeden vzor. Navyše množiny X a Y sú v tomto zmysle „rovnako veľké“, pretože medzi všetkými ich prvkami existuje jedno-jednoznačný vzťah.

Definícia 1.2.3 (Inverzná funkcia):
Nech je $f: X \to Y$ prostá (bijektívna) funkcia, kde $f(x) = y$. Potom funkciu $f^{-1}: Y \to X$, kde $f^{-1}(y) = x$ nazývame *inverzná funkcia* k funkcii f.

Samozrejme pre každé $x \in X$ platí $(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ (aj v opačnom poradí skladania funkcii).



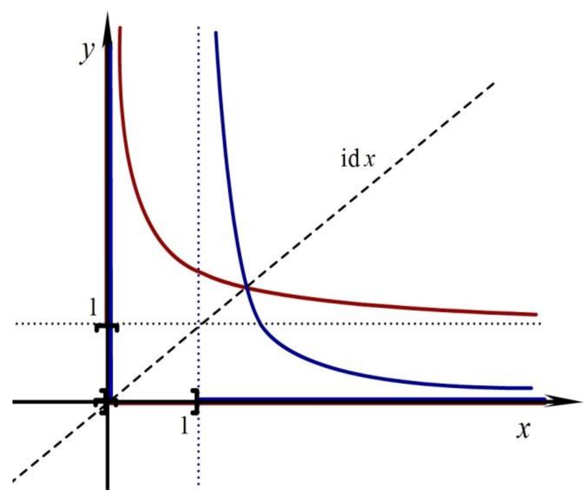
Obr.1.10: Zložením bijektívnej funkcie f a funkcie k nej inverznej f^{-1} dostávame identitu $(f^{-1} \circ f): X \to X$, $(f^{-1} \circ f): x \mapsto x$, čiže $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = (f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$.

Poznámka 1.2.2:
Grafy funkcii f a f^{-1} sú v reálnej rovine $\mathbb{R}^2$ symetrické podľa grafu identickej funkcie $\mathrm{id}(x) = x$ (píšeme aj v tvare smernicovej rovnice: $y = x$).

Príklad 1.3.3:

Nájdime inverznú funkciu k funkcii f: $]0\,,\ \infty[\ \to\ ]1\,,\ \infty[$, $f(x) = \frac{1}{x} + 1$:

Funkcia f je prostá, takže k nej vieme nájsť inverziu. Vieme, že platí identita $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, teda $\frac{1}{f^{-1}(x)} + 1 = x$ odtiaľ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, kde $f^{-1}:]1\,,\ \infty[\ \to\ ]0\,,\ \infty[$.



Obr.1.11: Inverzná funkcia $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ k funkcii $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ z príkladu 1.3.3.

Príklad 1.3.4:

Upravme (zúžme) definičný obor funkcie $f^*\colon\ \mathbb{R} \to [-1\,,\infty[\ , f^*(x) = x^2 - 1$ tak, aby sme k nej vedeli nájsť inverznú funkciu $f^{-1}\colon [-1\,,\infty[\ \to\ X \subseteq \mathbb{R}$:

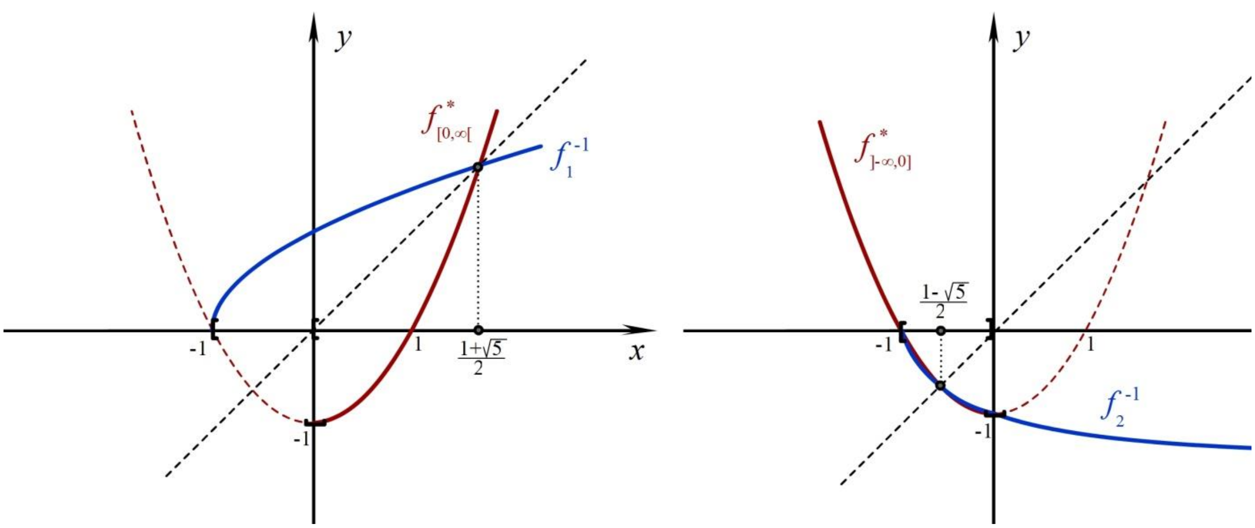
Riešenia máme hneď dve. Definičný obor f^* vieme rozdeliť na dva symetrické intervaly, na ktorých je f^* určite bijektívna. Týmito intervalmi sú $]-\infty\,,0]$ a $[0\,,\infty[$. Potom máme dve funkcie (bijektívne zúženia) $f_1\colon]-\infty\,,0] \to [-1\,,\infty[$ a $f_2\colon [0\,,\infty[. \to [-1\,,\infty[$, ku ktorým existujú inverzné funkcie $f_1^{-1}\colon [-1\,,\infty[\ \to\ ]-\infty\,,0]$ a $f_2^{-1}\colon [-1\,,\infty[\ \to\ [0\,,\infty[$. Ich vyjadrenie môžeme ľahko nájsť pomocou identity

$$f_1\left(f_1^{-1}(x)\right) = x \qquad \text{a} \qquad f_2\left(f_2^{-1}(x)\right) = x$$

teda

$$\left(f_{1,2}^{-1}(x)\right)^2 - 1 = x \qquad \Rightarrow \qquad f_{1,2}^{-1}(x) = \pm\sqrt{1+x}$$

Grafy inverzných funkcii sú, pochopiteľne, symetrické podľa grafu identickej funkcie $\mathrm{id}(x) = x$ s grafmi funkcii f_1^* a f_2^* Grafy navzájom inverzných funkcii sa okrem bodov $[-1{,}1]$ a $[0,-1]$ pretínajú na grafe identickej funkcie. x-ovú súradnicu priesečníkov nájdeme identitou $y = x$, teda riešením kvadratickej rovnice $x^2 - x - 1 = 0$, ktorej koreňmi sú $x_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$.

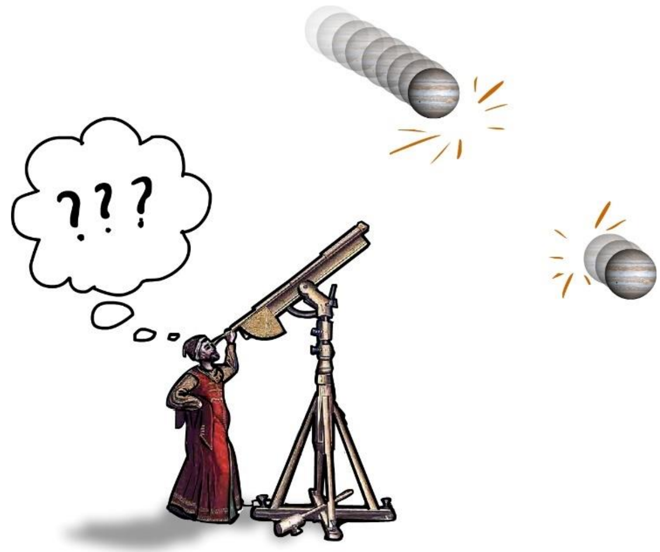


Obr.1.12: Funkcie z príkladu 1.3.4.

Poznámka 1.2.3:

Hľadanie f^{-1} ku f je možné zjednodušiť tak, že v zápise $f(x) = y$ jednoducho vymeníme x za y : $f^{-1}(y) = x$.

1.3. Limita a spojitosť funkcie



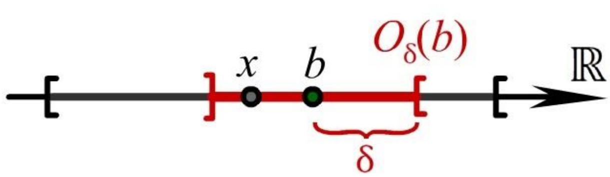
„Natura non facit saltus“ – „Príroda nerobí skoky“ , tvrdili v latinčine mnohé filozofické texty, ktoré spísal Gottfried Wilhelm Leibniz, jeden zo zakladateľov kalkulu. Ak si predstavíme akýkoľvek prírodný jav, či už pohyb a transformácie telies v priestore alebo fyzikálne polia, vidíme že tieto procesy nikdy neurobia náhly „skok“ z jedného stavu do iného v dvoch blízkych po sebe idúcich časových okamihoch alebo blízkych bodoch priestoru. Nevieme si predstaviť, že by sa napríklad letiaca častica alebo planéta zrazu okamžite „teleportovala“ z jedného bodu priestoru na iný. V moderných prírodných vedách samozrejme poznáme aj príklady systémov, ktoré sa správajú nespojito, no stále preferujeme modely reality, v ktorých možno aplikovať Leibnizovu prírodnú filozofiu.

Nás pochopiteľne zaujíma ako tieto vlastnosti popísať matematicky. Reálna funkcia $f: X \to Y$ nám môže opisovať akýkoľvek prírodný, či abstraktný fenomén a jej spojitosť [9] je dôležitá vlastnosť, s ktorou potrebujeme vedieť v matematickej analýze (a vôbec vo vyššej matematike) pracovať.

Spojitou chceme nazvať takú funkciu, ktorá nebude „skákať“ pri miniatúrnych zmenách v definičnom obore. Tieto „skoky“ (náhle zmeny) musíme nejakým spôsobom ukorigovať, t.j.: potrebujeme vzhľadom na hodnoty v definičnom obore X vedieť nejako ohraničiť funkčné hodnoty v bodoch, ktoré sú „blízko seba“.

Poznámka 1.3.1:

Na množine X sme „blízko“ nejakého bodu $b \in X$, ak nie sme priamo v ňom, ale v nejakej malej vzdialenosti, ktorú budeme značiť napr. δ, od tohto bodu. Množina takých $x \in X$, ktoré sú vzdialené nie menej ako δ od $b \in X$ nazývame δ-okolie bodu b. Túto množinu označujeme $O_\delta(b)$. V niektorých textoch je považovaná akákoľvek množina $M \subseteq X$ za okolie[10] bodu $b \in X$ ak obsahuje nejaké $O_\delta(b) =]b-\delta\,, b+\delta[$ („prstencové“ okolie bodu b s polomerom $\delta > 0$) teda $O_\delta(b) \subseteq M$. Takže napríklad aj samotná množina X by mohla byť okolím bodu $b \in X$, ak by tento bod nebol „hraničným“, t.j.: každé jeho δ-okolie by vyčnievalo mimo množinu X.



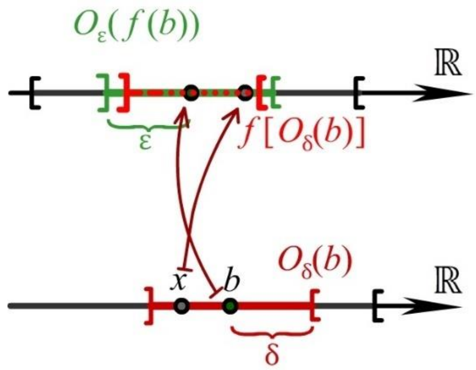
[9] Angl. **continuity ,** (adj.) **continuous**

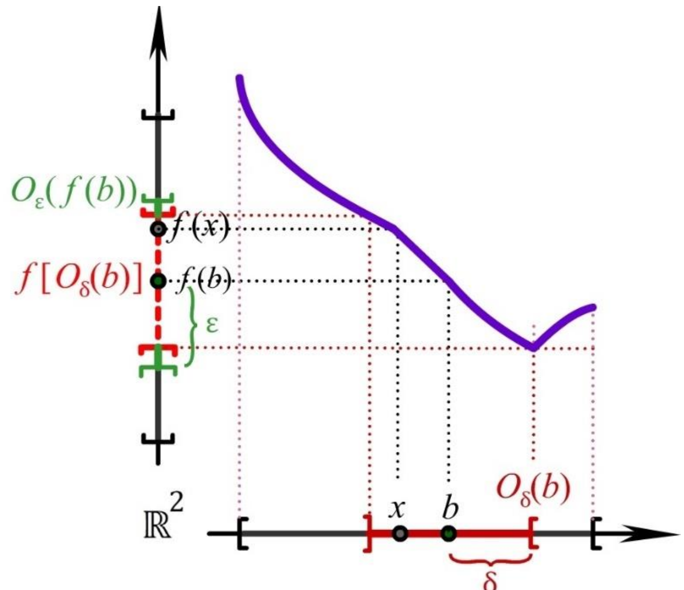
[10] Angl. **neighborhood**

Poznámka 1.3.2 (ε-δ definícia spojitosti):

Pre začínajúcich študentov technických smerov zatiaľ nie je potrebná, no hlavne študenti, ktorí si chcú naštudovať dôležité matematické formality, ju ocenia.

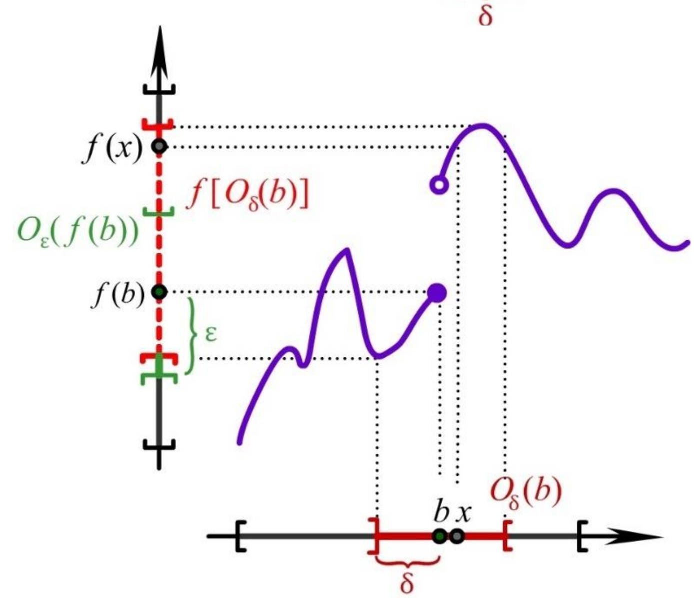
Nech $f: X \to Y$ a nech $b \in X$, potom hovoríme, že f je *spojitá* v bode b, ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že z platnosti $|x - b| < \delta$ potom platí $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, pre nejaké $x \in X$ (blízko bodu b).





Jednoduchšie povedané: ak si okolo $f(b)$ postavíme nejaké ε-okolie, potom ak je f spojitá, musí existovať pre toto ε také δ-okolie okolo bodu b, že sa funkciou f celá táto množina (δ-okolie bodu b) zobrazí do vnútra ε-okolia bodu $f(b)$.

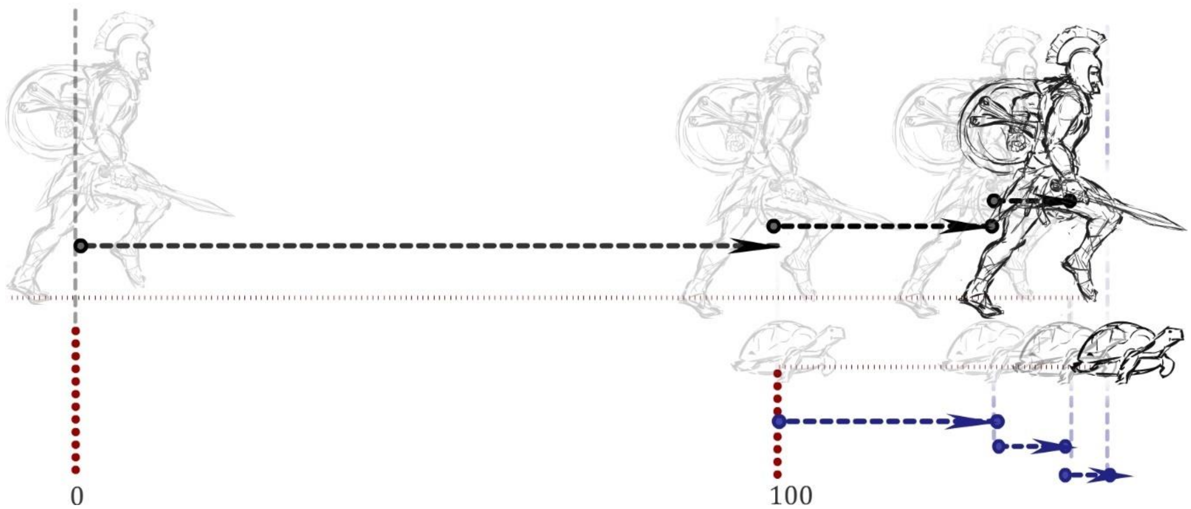
Ak tieto podmienky nie sú splnené (platí opak tvrdenia), funkcia nie je v bode $b \in X$ spojitá. Bez ohľadu na to aké malé δ-okolie b si vezmeme, vždy sa nejaké jeho body zobrazia mimo pevne zvoleného ε-okolia $f(b)$. To sa stáva, keď má funkcia v nejakom bode „skok“ alebo príliš „divoko osciluje“ v jeho okolí . V ľubovoľne malom okolí tohto bodu sa jej funkčná hodnota zmení o nenulovú hodnotu.



Teraz na chvíľu odbočíme k inej úvahe, aby sme si objasnili veľmi dôležitý koncept „približovania sa“.

Podľa starovekého Gréckeho filozofa Zenóna (z Eley) (490-430 pr.n.l.) bol pohyb len ilúziou. Táto myšlienka sa zachovala v podobe známeho *paradoxu Achilla a korytnačky.*

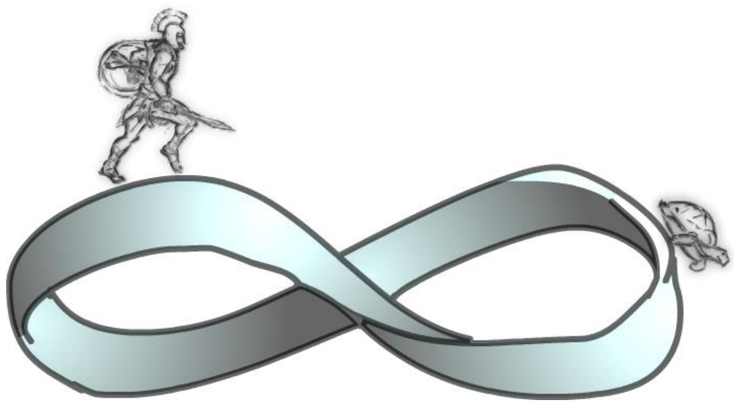
Predstavme si, že sa koná bežecký závod medzi korytnačkou a bájnym Gréckym bojovníkom, Achillom. Korytnačka je samozrejme o dosť pomalšia ako Achilles, a preto sa Achilles rozhodne dať korytnačke náskok (napriklad 100 metrov). Achilles teda bude štartovať z nulovej pozície, zatiaľ čo korytnačka 100 metrov pred ním. Podľa Zenóna Achilles nikdy nemôže predbehnúť korytnačku, pretože nato aby ju predbehol, napred musí dobehnúť do miesta, z ktorého korytnačka štartuje, no kým ho dosiahne, korytnačka sa už bude nachádzať o kus ďalej. Achillovi nebude robiť najmenší problém tento kus (o ktorý sa už korytnačka posunula) zdolať, no kým ho zdolá, korytnačka sa zas pohne o ešte menší kus ďalej. Dostávame zdanlivý paradox, v ktorom Achilles nikdy nedobehne korytnačku, pretože tá bude vždy o niečo (neustále sa zmenšujúci krok) napredovať.



Obr.1.13: paradoxný limitný pohyb Achilla a korytnačky

Je jasné, že v reálnom živote takéto paradoxy nevidíme. Paradoxný charakter tejto predstavy spočíva v tom, že Achilles aj korytnačka vykonávajú pohyb po krokoch, ktoré sa neustále zmenšujú. No keďže je pohyb závislý od času, zmenšovať sa musia aj jednotlivé časové intervaly. Naše vnímanie času je plynulé, časové kroky sa nespomaľujú, a preto by sme pozorovali, že Achilles veľmi rýchlo korytnačku dobehne a aj ju predbehne. Táto myšlienka je však veľmi dôležitá v predstave „blíženia sa“ k nejakému bodu.

Často je potrebné vyšetriť správanie sa funkcie keď sa postupne približujeme k nejakému bodu, ale nikdy ho nedosiahneme. Toto Zénonovské „nedosiahnutie“ bodu je užitočné napríklad keď bod, ku ktorému sa blížime, vôbec nie je prvkom definičného oboru funkcie. Nedáva preto zmysel dosadiť do funkcie tento konkrétny bod, no chceme vedieť ako sa funkcia správa v jeho bezprostrednej blízkosti.

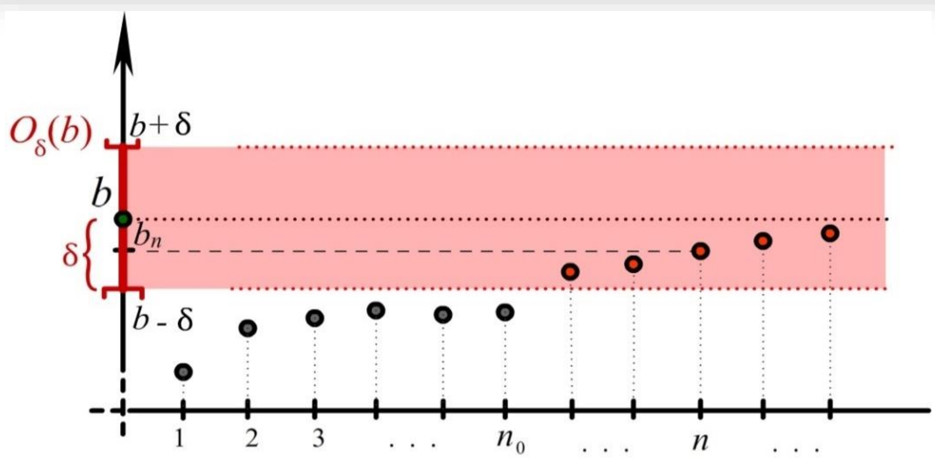


Takisto nám bude užitočná myšlienka napríklad vyšetrovať správanie funkcie, keď necháme premennú x rásť (do nekonečna). Ak poznáme napríklad funkciu času, ktorá popisuje pohyb častice po priamke, zaujíma nás na akej polohe sa postupom času ustáli (alebo neustáli), t.j.: ak necháme časovú premennú t, „plynúť" (rásť do nekonečna).

Predstavme si teraz postupnosť reálnych čísel $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (v príklade 1.1.2 sme si ukázali, že každú postupnosť môžeme chápať ako funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$). Zaujíma nás, či sa hodnoty b_n (členy postupnosti) ustália na nejakej hodnote $b \in \mathbb{R}$ ak necháme poradové číslo $n \in \mathbb{N}$ rásť do nekonečna (značíme $n \to \infty$). Číslo b potom voláme *limita* postupnosti. Formálne:

Definícia 1.3.1:
Nech je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť reálnych čísel, potom číslo $b \in \mathbb{R}$ nazývame *limitou* tejto postupnosti, ak pre každé $\delta > 0$ (ľubovoľne malé reálne číslo) existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$ (poradové číslo), že pre všetky $n > n_0$ (kde $n \in \mathbb{N}$) platí : $|b_n - b| < \delta$. Skrátene:

$$\forall \ \delta > 0, \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \, ; \forall \ n > n_0 \, , n \in \mathbb{N} : \ \ |b_n - b| < \delta$$



Obr.1.14:
Postupnosť bodov, ktorá má limitu b, sa správa tak, že ak si zvolíme akýkoľvek polomer $\delta > 0$, vždy sa nájde nejaké poradové číslo n_0, že sa už všetky členy s vyšším poradovým číslom budú nachádzať v nejakom δ-okolí bodu b

Používame označenie: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,
ktoré čítame: limita postupnosti (bodov) b_n kde $n \to \infty$ (n sa blíži k nekonečnu, resp. rastie do nekonečna).
Ak platí, že $b_n < b$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ potom hovoríme, že sa b_n *blíži k* b *sprava (zdola).* Značíme: $b_n \to b^+$
Analogicky
ak platí, že $b_n > b$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ potom hovoríme, že sa b_n *blíži k* b *zľava (zhora).* Značíme: $b_n \to b^-$

Veľmi často používame pojem „konvergencie“. Hovoríme, že postupnosť bodov b_n *konverguje* k nejakému b , ak sa k nemu limitne blíži, teda bod b je limitou postupnosti, čo značíme $b_n \to b$.

Môže sa samozrejme stať, že bude postupnosť čísel rásť do nekonečna.

Definícia 1.3.2:
Nech je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť reálnych čísel, potom ak pre každé $H \in \mathbb{R}$ (ľubovoľné reálne číslo) existuje také $n_0 \in \mathbb{N}$ (poradové číslo), že pre všetky $n > n_0$ (kde $n \in \mathbb{N}$) platí : $b_n > H$, potom $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ Skrátene:

$$\forall\, H \in \mathbb{R}\,, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,; \forall\, n > n_0\,, n \in \mathbb{N}:\ \ b_n > H \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

analogicky (pre postupnosť klesajúcu do záporného nekonečna):

$$\forall\ L \in \mathbb{R}\,, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,; \forall\, n > n_0\,, n \in \mathbb{N}:\ \ b_n < L \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$$

V oboch prípadoch hovoríme, že má postupnosť $\{b_n\}$ *nevlastnú limitu*.

Príklad 1.3.1:
Uvažujme postupnosť $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Potom $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, pretože ak delíme jednotku stále väčším kladným číslom n, hodnota zlomku sa blíži k nule (samozrejme sprava : $\frac{1}{n} \to 0^+$)

Príklad 1.3.2:
Uvažujme postupnosť $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ (tiež môžeme značiť id n, ako identická postupnosť).
Potom $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, triviálne z $n \to \infty$.

Poznámka 1.3.3:
Nekonečno „∞“ nie je prvkom $\mathbb{R}$. Nie je to totiž číslo, ale akýsi „príkaz“ bez zastavenia zvyšovať hodnotu nejakej premennej.

Prečo nakoniec Achilles dobehne korytnačku? Odpoveď je priamočiara: Pretože sa Achilles pohybuje rýchlejšie ako korytnačka, takže za rovnaký časový interval prejde väčšiu vzdialenosť.
A aj keď sme si vyznačili

Ďalej si ukážeme dôležitú vetu:

Veta 1.3.1:
Každá postupnosť $\{a_n\}$ má práve jednu limitu (ak existuje).

<u>Dôkaz:</u>
Túto skutočnosť dokážeme sporom: Predpokladajme, že existujú dve limity

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a_2 \quad \text{pričom } a_1 \neq a_2 \tag{1.3.1.1}$$

Teda pre ľubovoľné $\forall\ \delta > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,; \forall\, n > n_0$ platí:

$$|a_n - a_1| < \delta \text{ a zároveň } |a_n - a_2| < \delta \tag{1.3.1.2}$$

Z vlastností nerovníc s absolútnymi hodnotami vieme, že z (1.3.1.2) vyplýva

$$a_n + \delta > a_1 \tag{1.3.1.3.a}$$

$$\text{a } \ a_n + \delta > a_2 \tag{1.3.1.3.b}$$

A tiež

$$a_n - \delta > a_1 \tag{1.3.1.4.a}$$

$$\text{a } \ a_n - \delta > a_2 \tag{1.3.1.4.b}$$

Keď od seba jednoducho odčítame nerovnosti (1.3.1.3. a) a (1.3.1.3. b) dostávame

$$a_1 - a_2 > 0 \tag{1.3.1.5}$$

A odčítaním (1.3.1.4. a) a (1.3.1.4. b) zas

$$a_1 - a_2 < 0 \tag{1.3.1.6}$$

Nerovnosti (1.3.1.5) a (1.3.1.6) si protirečia (žiadne reálne číslo nemôže byť aj kladné aj záporné), dostávame teda spor. Takže $a_1 = a_2$. □

Postupnosť sa však nemusí ustáliť na žiadnej hodnote. Môže oscilovať akokoľvek. Vtedy hovoríme, že postupnosť *nemá limitu*.

Príklad 1.3.2:

Uvažujme postupnosť $\left\{\frac{1+n}{2n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n-2}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2-\frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+1}{2-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}} = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Viac o limitách postupností si povieme v kapitole o postupnostiach a radoch. Tento stručný ale formálny úvod do limít postupností sme potrebovali nato, aby sme mohli definovať limitu funkcie:

Definícia 1.3.3:

Nech je $f: X \to Y$ reálna funkcia, kde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Nech je $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť reálnych čísel takých, že $x_n \in X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, kde $b \in \mathbb{R}$, potom hovoríme, že má funkcia f v bode b

- *Limitu sprava*, ak $x_n > b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ a postupnosť funkčných hodnôt $f(x_n)$ má vlastnú alebo nevlastnú limitu. Označujeme: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to b^+} f(x)$
- *Limitu zľava*, ak $x_n < b$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ a postupnosť funkčných hodnôt $f(x_n)$ má vlastnú alebo nevlastnú limitu. Označujeme: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to b^-} f(x)$
- *Obojstrannú limitu* v $b \in \mathbb{R}$, ak má v tomto bode limitu sprava aj limitu zľava a tieto limity sa rovnajú, t.j.: $\lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x)$

1.4. Ďalšie dôležité vlastnosti funkcii

Nech $f: X \to Y$, kde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

- Hovoríme, že f je na X *konštantná*, ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) = f(x_2) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je reálna konštanta.
- Hovoríme, že f je na X *rastúca,* ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- f je na X *klesajúca,* ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.
- f je na X *neklesajúca,* ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f je na X *nerastúca,* ak pre každé $x_1, x_2 \in X$ také, že $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Hovoríme, že je f je na X *zhora ohraničená,* ak pre každé $x \in X$ existuje také $H \in \mathbb{R}$, že $f(x) \leq H$.
- Hovoríme, že je f je na X *zdola ohraničená,* ak pre každé $x \in X$ existuje také $L \in \mathbb{R}$, že $f(x) \geq H$.
- Ak je f na X ohraničená zhora aj zdola, potom skrátene hovoríme, že je na X ohraničená.
- Hovoríme, že f je *párna*, ak pre každé $x, -x \in X$ platí: $f(x) = f(-x)$.

  To sa prejavuje tak, že je jej graf symetrický podľa osi y.
- Hovoríme, že f je *nepárna*, ak pre každé $x, -x \in X$ platí: $f(-x) = -f(x)$.

  To sa prejavuje tak, že je jej graf stredovo symetrický podľa bodu počiatku (0,0).
- Hovoríme, že f je *periodická* (s periódou T), ak existuje také číslo $T \in \mathbb{R}$, že platí

  (1) Ak $x \in X$, potom aj $x + T \in X$.

  (2) Pre každé $x \in X$ je $f(x + T) = f(x)$.

  Jej graf má neustále opakujúci sa úsek o dĺžke T.

Príklad 1.4.1: